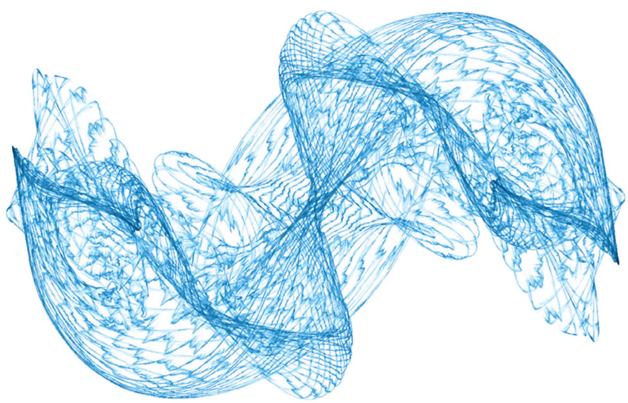
Год науки и технологий '21

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ МОРСКОЙ ГЕОЛОГИИ И ГЕОФИЗИКИ
ДАЛЬНЕВОСТОЧНОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

INSTITUTE OF MARINE GEOLOGY AND GEOPHYSICS
FAR EASTERN BRANCH OF THE RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES

D.P. Kovalev
P.D. Kovalev

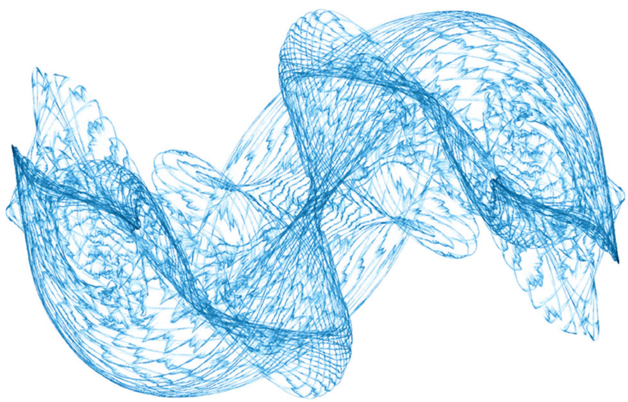
CHAOTIC OSCILLATIONS, BIFURCATION AND SYNCHRONIZATION IN MARINE DYNAMICAL SYSTEMS



IMGG FEB RAS
Yuzhno-Sakhalinsk
2021

Д.П. Ковалев
П.Д. Ковалев

ХАОТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ, БИФУРКАЦИЯ И СИНХРОНИЗАЦИЯ В МОРСКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ



Южно-Сахалинск
2021

УДК 551.466
К 56
Ковалев Д.П., Ковалев П.Д. **Хаотические колебания, бифуркация и синхронизация в морских динамических системах.** – Южно-Сахалинск: ИМГиГ ДВО РАН, 2021. – 114 с.

ISBN 978-5-6044483-2-8
DOI: 10.30730/978-5-6044483-2-8.2021-2

В работе рассматриваются результаты изучения поведения морских динамических систем, в том числе и с хаотическими колебаниями. Такие исследования необходимы и стимулировались практическими целями, в первую очередь, системами швартовки судов для учета тех последствий, к которым может привести возникновение сложной динамики, поскольку разработанная к настоящему времени теория нелинейных динамических систем показывает, что большая волна может образовываться как комбинация меньших волн.

Описываемые исследования проведены с использованием данных натурных наблюдений в портовых бухтах и прибрежной зоне о. Сахалин и математических моделей динамических систем с применением уравнений Дуффинга и Ван дер Поля. Это обеспечивает всестороннее понимание поведения динамических систем с учетом воздействия на них приходящих морских волн и позволяет выработать рекомендации по предотвращению катастрофических ситуаций.

Показано, что при сильном волнении в бухтах, в том числе и совместно с приливной волной, режим волнения может переходить к хаотическому, при котором возможно образование волн большой амплитуды. Также, при качке на приходящих волнах пришвартованного судна возможно возникновение режима «ударного генератора», при котором судно будет ударяться о демпферы с большой силой.

Рассмотрено поведение прибрежной динамической системы для покрытого льдом моря. Показано, что при определенных условиях возможна синхронизация периодов колебаний морских льдин с периодом приходящих волн. Такой процесс может привести к росту амплитуды колебаний льда и, как следствие, к его разрушению, что представляет опасность и может использоваться для подачи сигнала тревоги.

Для специалистов в области динамики океана и береговой инженерии, студентов и аспирантов по специальностям «океанология» и «физика атмосферы и гидросферы.

Ответственный редактор: *В.И. Иволгин*, к.ф.-м.н., Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина
Рецензент: *Т.В. Белоненко*, д.г.н., профессор кафедры океанологии Санкт-Петербургского государственного университета

Печатается по решению Ученого совета
Федерального государственного бюджетного учреждения науки
Института морской геологии и геофизики Дальневосточного отделения Российской академии наук.
Россия, 693022, Южно-Сахалинск, ул. Науки, д. 1Б; e-mail: nauka@imgg.ru

UDK 551.466
K 56
Kovalev D.P., Kovalev P.D. **Chaotic oscillations, bifurcation and synchronization in marine dynamical systems.** – Yuzhno-Sakhalinsk: IMGG FEB RAS, 2021. – 114 p.

ISBN 978-5-6044483-2-8
DOI: 10.30730/978-5-6044483-2-8.2021-2

The paper discusses the results of studying the behavior of marine dynamical systems, including those with chaotic oscillations. These studies are necessary and stimulated by practical goals, primarily by ship mooring systems, to take into account the consequences that the emergence of complex dynamics can lead to, since the theory of nonlinear dynamic systems developed to date shows that a large wave can be formed as a combination of smaller waves.

The described studies were carried out using data from field observations in port bays and the coastal zone of Sakhalin Island and mathematical models of dynamical systems using the Duffing and Van der Pol equations. This provides a comprehensive understanding of the behavior of dynamic systems, taking into account the impact on them of the incoming sea waves and allows to develop recommendations for the prevention of catastrophic situations.

It is shown that strong wind waves in the bays and also when combined with tidal waves impact, the wave regime can change to chaotic, in which the formation of waves of large amplitude is possible. Also, when pitching on the incoming waves of a moored vessel, the "impact generator" mode may arise in which the vessel will be hit on the dampers with great force.

The behavior of the coastal dynamic system for an ice-covered sea is considered. It is shown that, under certain conditions, synchronization of the periods of sea ice floes oscillations with the period of incoming waves is possible. Such a process can lead to an increase in the amplitude of ice floe oscillations and, as a consequence, to its destruction, which is dangerous and can be used to signal an alarm.

For specialists in the field of ocean dynamics and coastal engineering, undergraduate and graduate students in the field of oceanology and physics of the atmosphere and hydrosphere.

Executive editor: *V.I. Ivolgin,* PhD phys.-math., Derzhavin Tambov State University
Reviewer: *T.V. Belonenko,* DSc on geographical sciences, Professor of the Chair of Oceanology, Federal State St Petersburg State University

ISBN 978-5-6044483-2-8
9 785604 448328

The book is published according to decision of the Scientific Council of the
Institute of Marine Geology & Geophysics
Far Eastern Branch of the Russion Academy of Sciences
Russia, 693022, Yuzhno-Sakhalinsk, Nauki str. 1 B; e-mail: nauka@imgg.ru

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Эпизодически наблюдаются случаи, когда по неизвестным причинам в открытом море или у причала тонут суда или обрываются швартовые канаты. Можно заключить, что существуют явления, которые при определенных условиях могут представлять опасность и которые мы пока не можем предвидеть. К таким явлениям в последнее время исследователи относят хаотические колебания.

Так, например, 8 марта 2007 г. в порту Антверпена в ходе загрузки перевернулось судно Republica di Genova лондонской компании Grimaldi Lines. Как сообщил капитан антверпенского порта, 216-метровый контейнеровоз, на котором помимо контейнеров перевозятся автомобили Fiat из Италии в Антверпен, утонул по неизвестным пока причинам. По его словам, судно медленно накренилось на один из бортов, при этом в воду сползли около сотни контейнеров и автомобилей (рис. 1).

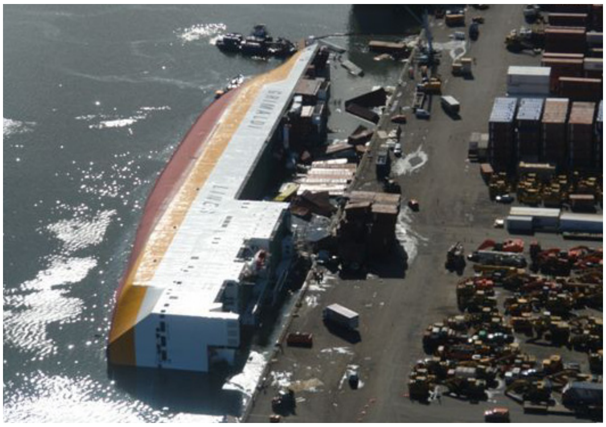


Рис. 1. Фото контейнеровоза Republica di Genova у причала Антверптенского порта 8 марта 2007 г.

Такие случаи, зарегистрированные в военно-морских и морских технологических областях, явились мотивацией для изучения поведения судов у причалов при воздействии на них приходящих волн. При этом ранее используемые традиционные методы волнового линейного моделирования не всегда приводили к адекватному результату, потребовались новые (нелинейные) теории характеристики волновой среды и методологии генерации волн.

По существу, все волновые процессы в море нелинейны в той или иной степени. К тому же, в нелинейных системах часто имеют место новые явления, принципиально невозможные в линейных системах [Dynamics of elastic ..., 1999]. Поэтому судно или морскую акваторию необходимо рассматривать как нелинейную динамическую систему, подверженную внешнему воздействию морских волн [Thompson, Stewart, 2002].

Следует отметить, что исследователи ранее уже использовали для анализа широкий спектр различных типов динамических систем, начиная от моделей производственных правил компьютеров [Newell, Simon, 1972] и заканчивая моделями искусственных нейронных сетей мозга [Grossberg, 1982; Rumelhart, McClelland, 1986]. Однако, для описания морских процессов такой подход использовался в основном для пришвартованных судов.

Важным элементом этого нового направления, которое прекрасно отражает его самые передовые теоретические, вычислительные и экспериментальные особенности, является открытие и определение хаотических движений в простых детерминированных моделях большого числа научных дисциплин. А недавнее открытие довольно больших режимов хаоса в давно знакомых синусоидально управляемых осцилляторах Дуффинга и Ван дер Поля подчеркивает, как много было упущено классическим анализом обыкновенных дифференциальных уравнений.

Изучение поведения морских динамических систем с хаосом необходимо для практических целей и учета тех последствий, к которым может привести возникновение сложной динамики, например, для решения задачи о динамике судна или нефтяной платформы при наличии волнения [Thompson, Stewart, 1986]. Только нелинейный анализ обеспечивает всестороннее понимание ситуации и выработку условий по предупреждению катастрофы.

То, как огромная волна могла возникнуть в хаотичных средах, таких как свет и вода, некоторое время ставило ученых в тупик. К настоящему времени разработана теория, согласно которой большая волна должна образовываться как комбинация меньших волн. Как будет показано ниже, качественный переход динамической системы (бифуркация) к хаотическим движения может привести в конечном итоге к катастрофическому событию, в связи с чем возникает необходимость анализа морских динамических систем, в том числе и нелинейных, с целью выявления возможных последствий таких переходов. Поэтому, учитывая еще и возможную опасность проявления хаоса в нелинейной системе, авторы настоящей работы решили обратиться к изучению хаотических колебаний в морских динамических системах.

Следует отметить, что теория хаоса и нелинейных колебаний достаточно сложна и потребовала бы большого объема книги для изложения. К тому же, ниже будет рассматриваться исключительно применение результатов этих исследований, не претендуя на новые выводы, изменения и дополнения этих теорий. Поэтому в работе эти вопросы освещаются очень кратко. Для интересующихся более подробным описанием рекомендуем обратиться к [Рабинович, Трубецков, 2000; Терехов, 2009; Thompson, Stewart, 2002; Анищенко, Вадивасова, 2011; Arovas, 2014] и другим источникам, содержащимся в списке литературы.

Отметим также, что при написании первой главы авторы активно использовали современные литературные источники по теории динамических систем, приведенные в списке литературы, и изложили первую главу на их основе. Ссылки на источники размещены в тексте. Авторы настоящей работы не претендуют на авторские права других авторов и приносят им свою благодарность за предоставленные статьи и книги.

ГЛАВА 1

Динамические системы

1.1. Понятие динамических систем

В многочисленной научной литературе по динамическим системам, нелинейным колебаниям, хаосу и синергетике, например, [Birkhoff, 1927; Zakharov, Kuznetsov, 1984; Guckenheimer, Holmes, 1993; Kuznetsov, 1995; Thompson et al., 2002; Busemeyer, 2000; Терехов, 2009], динамические системы определяются практически одинаково. Под динамической системой понимается математическая модель некоторого объекта, процесса или явления, которая может быть представлена как система, для которой описаны некоторые состояния. Тогда динамическая система описывает поведение некоторого процесса как последовательность переходов из одного состояния в другое.

Динамические системы описывают общие законы, которым подчиняется система. Различные частные случаи общего закона могут быть получены простым изменением либо начального состояния системы, либо ее параметров. Для заданного начального состояния и фиксированного набора значений параметров динамическая система генерирует уникальную траекторию или путь через пространство состояний в зависимости от времени. Основная цель теории динамических систем – разработать аналитические методы для изучения всех траекторий, создаваемых динамической системой, и понять, как эти траектории изменяются в зависимости от начального состояния и параметров системы [Busemeyer, 2000].

Динамическая система формально определена, если заданы три следующих элемента [Анищенко, Вадивасова, 2011]:

1) множество состояний X, образующее полное метрическое пространство (фазовое пространство);

2) множество моментов времени Θ;

3) оператор эволюции $T_{t_0}^{\tau}$ – некоторое отображение $T_{t_0}^{\tau}: X \to X$, которое каждому состоянию $\overrightarrow{x_0} \in X$ в начальный момент времени $t_0 \in \Theta$ однозначно ставит в соответствие некоторое состояние $\overrightarrow{x_t} \in X$ в любой другой момент времени $t = t_0 + t \in \Theta$. Таким образом, можно записать [Анищенко, Вадивасова, 2011]:

$$\overrightarrow{x_t} = T_{t_0}^{\tau}\, \overrightarrow{x_0}, \qquad t = t_0 + \tau. \tag{1.1}$$

Оператор эволюции является непрерывным в X и обладает следующими свойствами:

$$T_{t_0}^{0}\, \overrightarrow{x_0} = \overrightarrow{x_0}; \tag{1.2}$$

$$T_{t_0}^{\tau+s}\ \overrightarrow{x_0} = T_{t_{0+s}}^{\tau} \circ T_{t_0}^{s}\ \overrightarrow{x_0} = T_{t_0+r}^{s} \circ T_{t_0}^{\tau}\ \overrightarrow{x_0}\ , \tag{1.3}$$

где $^{\circ}$ означает суперпозицию операторов.

Исходя из характера множеств *X*, Θ и свойств оператора эволюции, можно дать наиболее общую классификацию динамических систем. Если $\Theta = R^1$, то есть время принимает непрерывное множество значений, то оператор эволюции непрерывен по τ и соответствующую динамическую систему называют системой с непрерывным временем или потоком, по аналогии с течением жидкости. Если множество Θ является счетным, то динамическую систему называют системой с дискретным временем или каскадом.

Множество состояний *X*, так же, как и множество моментов времени, может быть различно. Это может быть конечное или счетное множество, что характерно для класса динамических систем, называемых клеточными автоматами. Множество *X* может представлять собой арифметическое пространство с конечной размерностью *N* (вещественное – R^N или комплексное – Z^N). Таким является фазовое пространство динамической системы, задаваемой обыкновенными дифференциальными уравнениями. Наконец, X может быть функциональным пространством. В этом случае динамическая система задается дифференциальными уравнениями в частных производных, интегральными, интегро-дифференциальными уравнениями или обыкновенными дифференциальными уравнениями, содержащими задержку во времени [Анищенко, Вадивасова, 2011].

Оператор эволюции может обладать теми или иными характерными свойствами, позволяющими выделить особые классы динамических систем. Например, можно выделить класс линейных динамических систем, для которых оператор эволюции является линейным, то есть удовлетворяет правилу суперпозиции [Анищенко, Вадивасова, 2011]:

$$T_{t_0}^{\tau}\ (\vec{x} + \vec{y}) = T_{t_0}^{\tau}\ \vec{x} + T_{t_0}^{\tau}\ \vec{y}\ . \tag{1.4}$$

Если оператор нелинейный (не удовлетворяет правилу (1.4)), то и соответствующая динамическая система называется нелинейной.

Если оператор эволюции $T_{t_0}^{\tau}$ определен для всех значений сдвига во времени τ, как для τ ≥0, так и для τ <0, то он является обратимым, т. е. существует обратный к нему оператор , позволяющий, зная состояние системы в момент $t = t_0 + \tau$, найти состояние системы в предшествующий момент t_0. Динамическая система также называется обратимой во времени. Если оператор эволюции определен только для τ ≥ 0, то он необратим и предшествующее состояние системы однозначно определить нельзя. Система в этом случае называется необратимой во времени.

Динамическая система является моделью какой-либо реальной физической, химической, биологической, социальной или любой другой системы. Здесь мы будем рассматривать исключительно гидрофизические и гидродинамические системы. Динамические системы характеризуются набором переменных, значения которых могут быть определены из уравнений её движения. Мгновенное положение системы определяется местоположением и скоростью движения, которые отображаются в фазовом пространстве в виде точки. При этом, зная текущее состояние системы, можно определить ее состояние в следующий момент времени.

Говоря о состоянии системы, необходимо дать определение используемому здесь термину «состояние». Под состоянием системы в некоторый фиксированный момент времени обычно понимают значения физических величин, количество которых достаточно для того, чтобы определить эти же величины в последующие моменты времени. Такие величины называют динамическими переменными. И для осциллятора состояние системы однозначно определено заданием его координат и скорости [Трубецков, Рожнев, 2001].

Совокупность всех допустимых состояний динамической системы образует её фазовое пространство. Вообще говоря, динамика изучает движение в фазовом пространстве. При этом система характеризуется своим начальным состоянием и законом, по которому она переходит из одного состояния в другое [https://wiki.loginom.ru/articles/dynamic-system.html#dinamicheskaya-sistema-dynamic-system]. Если число динамических переменных конечно и равно N, то и фазовое пространство имеет конечную размерность, совпадающую с N. Системы с фазовым пространством конечной размерности называются конечномерными или сосредоточенными [Трубецков, Рожнев, 2001].

Очень часто состояние системы задается одной или несколькими функциями. Чтобы рассчитать колебания такой системы необходим бесконечный набор динамических переменных. Поэтому системы с такими свойствами называются бесконечномерными или распределенными. Сосредоточенные системы часто описываются с использованием обыкновенных дифференциальных уравнений, а распределенные системы с помощью дифференциальных уравнений в частных производных [Трубецков, Рожнев, 2001].

Различают системы с дискретным (каскады) и с непрерывным (потоки) временем. Для первых поведение системы (траектория системы в фазовом пространстве) описывается последовательностью состояний, а для вторых – определяется для каждого момента времени на вещественной или комплексной оси. Динамическая система (как с дискретным, так и с непрерывным временем) обычно описывается системой дифференциальных уравнений.

Среди динамических систем выделяют два вида от начальных условий: консервативные и диссипативные. Консервативные модели в отличие от диссипативных не учитывают потерь энергии. При достижении равновесного состояния консервативные системы могут оставаться в нем бесконечно длительное время при неизменных внешних условиях. Диссипативные системы достигают установившегося режима вблизи аттракторов – классических типов динамического движения. Однако в диссипативных системах могут возникать хаотические движения при сколь угодно малом изменении начальных условий, в результате чего невозможно предсказывать поведение системы на больших интервалах времени. Такие изменения приводят к перемежаемости возникновения хаоса и порядка [Терехов, 2009]. И, если эволюционирующая система находится в устойчивом состоянии равновесия, периодических колебаний или хаоса, предсказание любого внезапного изменения имеет решающее значение.

Исследователи используют широкий спектр различных типов динамических систем, начиная от моделей производственных правил компьютеров [Newell, Simon, 1972] и заканчивая моделями искусственных нейронных сетей мозга [Grossberg, 1982; Rumelhart, McClelland, 1986]. Эти модели различаются по некоторым основным характеристикам, хорошо описанным в работе [Busemeyer, 2000]. Ниже будем рассматривать в основном нелинейные системы.

Динамические системы представляют интерес для теоретического исследования поведения реальных объектов и процессов. Например, пришвартованное к причалу судно под воздействием морского волнения. Это динамическая система, изменяющаяся во времени и требующая для своего изучения математической модели.

Получение хорошей математической модели динамической системы является сложным процессом. Главным критерием при выборе модели является ее соответствие реальным процессам (или описывающим их данным), что естественно подтверждается сравнением результатов теоретических исследований и экспериментальных данных.

1.2. Осцилляторы

Поскольку в настоящей работе будут рассматриваться в качестве динамических систем осцилляторы, остановимся на понятии автономных осцилляторов. Это понятие было введено Андроновым и Виттом [Андронов и др., 1959]. Хотя Рэлей уже различал поддерживаемые и вынужденные колебания, а Пуанкаре ввел понятие предельного цикла, именно Андронов, Витт и их ученики объединили строгие математические методы с физическими идеями [Пиковский и др., 2003]. Автономные осцилляторы являются подмножеством более широкого класса динамических систем. Это обстоятельство подразумевает, что мы имеем дело с детерминированным движением, т. е. если известно состояние системы в определенный момент времени, то можно однозначно определить ее состояние в будущем.

Такие системы широко распространены в природе и технике. Введено их универсальное описание в пространство состояний и их универсальный образ – предельный цикл. В работе [Андронов и др., 1959] проиллюстрированы особенности, которые делают автономные осцилляторы отличными от принудительных и консервативных систем. Именно эти особенности позволяют осуществлять синхронизацию.

Универсальное свойство разнообразных колеблющихся объектов, таких, например, как электронный генератор, маятниковые часы состоит в том, что все эти активные системы, будучи разрозненными или изолированными, продолжают колебаться в своих собственных ритмах. Этот ритм целиком определяется свойствами самих систем; он поддерживается за счет внутреннего источника энергии, который компенсирует диссипацию в системе. Такие осцилляторы называются автономными и могут быть описаны в рамках класса нелинейных моделей, известных в физике и нелинейной динамике как самодостаточные или автоколебательные системы [Пиковский и др., 2003].

Этот тип динамических систем очень важен при изучении колебательных процессов, поэтому А.А. Андронов предложил для него специальный термин – автоколебательные системы [Андронов и др., 1959]. Математическим образом автоколебаний служит предельный цикл Андронова-Пуанкаре – замкнутая изолированная траектория в фазовом пространстве, отвечающая устойчивому периодическому движению.

Следует отметить, что не все осцилляторы являются самодостаточными. Это в большой степени относится к волновым процессам в морях и океанах. Так, например, резонансные акватории, обладая добротностью, способствуют генерации сейш в них, и при наличии внешнего возбуждающего воздействия колебания в акваториях будут генерироваться. Однако, после прекращения возбуждающего воздействия – метеоцунами или другого источника энергии – колебания постепенно затухнут. Примерно такая же ситуация произойдет при штиле на море и качка судна прекратится. В то же время, океан и атмосфера являются очень активными системами с перераспределением между ними колоссальной энергии, и поэтому колебания в морских резонансных системах, как показывают наши многолетние измерения, продолжаются практически постоянно. Такие системы могут переходить в хаотический режим или синхронизоваться с вынуждающим воздействием.

1.3. Линейная и нелинейная динамика

По мнению исследователей большая часть волновых, гидрофизических и гидродинамических процессов в морях являются слабо нелинейными или нелинейными и для математического описания поведения нелинейных систем требуются нелинейные уравнения, содержащие изучаемые величины в степенях больше единицы или коэффициенты, зависящие от этих величин [Beji, 1995; Zakharov, 1998; Thompson et al., 2002; Yim et al., 2017].

Следует отметить, что для упрощения и достижения результата вычислений иногда используют линеаризованные модели, как это делают, например, Томпсон с соавторами и другие исследователи [Thompson, 1983; Thompson, Ghaffari, 1983; Thompson et al., 1984; 2002; Thompson, Stewart, 2002] для описания колебания заякоренного судна или стоящего у причала.

Такая модель называется линейным гармоническим осциллятором и является примером линейной динамической системы. Уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора имеет вид [Трубецков, Рожнев, 2001]:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \tag{1.5}$$

где $x\,(t)$ – переменная, описывающая состояние системы, являющаяся обобщенной координатой перемещения; γ – параметр характеризующий потери энергии;

ω_0 – собственная частота колебаний. Точками обозначается дифференцирование по времени t.

Как отмечается в работе [Yim et al., 2017], традиционные методы волнового линейного моделирования, анализа и проектирования, используемые для испытаний крупных судов и обычных морских сооружений в крупномасштабных волновых бассейнах, все еще могут быть адекватны этим морским сооружениям нового поколения для низких морских районов. Однако, учитывая эти новые требования, для проведения экспериментальных модельных испытаний этих инновационных морских структур с учетом вышеупомянутых сдвигов эксплуатационных характеристик для высоких морских пространств потребуются новые (нелинейные) теории характеристики волновой среды и методологии генерации волн. Волновые исследовательские установки стараются идти в ногу с новыми требованиями и сдвигами в эксплуатационных характеристиках либо совершенствуя свои существующие установки, либо строя новые современные установки.

Нелинейная динамика, начавшая формироваться при изучении движения планет, имеет некоторые претензии на то, чтобы быть самой древней из научных проблем. Основоположником геометрической динамики общепризнанно является Анри Пуанкаре (1854–1912), который видел полезность изучения топологической структуры в фазовом пространстве динамических траекторий. Теоретические основы, заложенные Пуанкаре, были усилены Г.Д. Биркоффом (1884–1944), но, казалось, мало влияли на прикладную динамику в течение почти полувека, за исключением нескольких примеров, таких как анализ устойчивости Ляпунова, идеи Пуанкаре.

Экспериментальные наблюдения малоразмерного поведения, например, в потоке Куэтта [Feynman, 1964] (поток вязкой жидкости в пространстве между двумя поверхностями, одна из которых движется тангенциально относительно другой), кинетике химических реакций и твердотельной плазме, показывают, что лучшее понимание априорных малоразмерных математических моделей динамики было бы полезным руководством к поведению в более сложных диссипативных системах [Thompson, Stewart, 2002]. Такие малоразмерные модели представлены начальными задачами для обыкновенных дифференциальных уравнений. Одним из важных примеров являются затухающие, вынужденные колебания нелинейного осциллятора со смещением x:

$$\ddot{x} + k\dot{x} + x^3 = B\cos\omega t, \tag{1.6}$$

где точка обозначает дифференцирование по времени t. Поведение решений этого нелинейного уравнения было широко изучено Дуффингом [Duffing, 1918; The Duffing …, 2011]. Другим осциллятором второго порядка, представляющим большой интерес, является уравнение Рэлея – Ван дер Поля:

$$\ddot{x} + \alpha(x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = A\sin\omega t, \tag{1.7}$$

которое описывает автоколебательные релаксационные колебания для $\alpha >> 1$ и $A = 0$. Это уравнение, введенное Лордом Рэлеем [Rayleight, 1894], было изучено как теоретически, так и экспериментально с использованием электрических схем Ван дер Поля [Van der Pol, 1927]. Из своих экспериментов Ван дер Поль хорошо знал, что релаксационные колебания легко поддаются захвату с частотой вынуждающей силы ω, и что частота одного и того же форсированного (с внешним воздействием) генератора (с фиксированными числовыми значениями α, ω_0, A и ω) может быть захвачена различными субгармоническими движениями, зависящими только от того, как генератор запускается. Это явление множественного конечного поведения в одной и той же системе является важной и общей чертой рекуррентной нелинейной динамики.

Детальный математический анализ уравнения Ван дер Поля с внешним воздействием, изложенный в работах [Cartwright, Littlewood, 1945; Levinson, 1949] выявил важный аспект этого явления в случаях, когда возможны два различных конечных движения, описываемых уравнением (1.7), и переходный процесс может колебаться между ними в течение сколь угодно долгого времени, прежде чем перейти к одному или другому.

Геометрическая картина фазового пространства этого сложного переходного поведения была представлена в работе [Smale, 1963], где показано, что, несмотря на аспект истинной случайности, эти колеблющиеся переходные процессы управляются относительно простым растяжением и складыванием ансамблей в фазовом пространстве. Кроме того, Смейл показал, что его качественная картина – подкова Смейла – сохраняется при типичных малых возмущениях уравнения (1.7). Таким образом, парадоксальное сочетание случайности и структуры, теперь называемое хаосом, часто встречается в нелинейной динамике.

В настоящее время наблюдается расцвет нелинейной динамики благодаря большим теоретическим достижениям в качественном топологическом подходе Пуанкаре, а также широкому использованию мощных и быстродействующих компьютеров [Thompson, Stewart, 2002]. Это стимулируется приложениями нелинейной динамики во многих научных областях: биологических, экологических, социальных и экономических, а также в традиционных областях механики, физики и химии. И везде, где требуется смоделировать и исследовать временную эволюцию естественной или искусственной системы, используются тонкие и универсальные методы теории динамических систем.

Важным элементом этого направления является открытие и определение хаотических движений в простых детерминированных моделях во множестве дисциплин, начиная от динамики населения и метеорологии до ускорителей частиц. А открытие довольно больших режимов хаоса в давно известных осцилляторах Дуффинга и Ван дер Поля с внешним возбуждающим воздействием подчеркивает, как много было упущено классическим анализом обыкновенных дифференциальных уравнений [Thompson, Stewart, 2002].

После описания линейных и нелинейных моделей можно немного конкретизировать для них понятие устойчивости [Busemeyer, 2000]. Линейная система обладает особым свойством допускать только одну точку равновесия (при условии, что система не является сингулярной). Устойчивость точек равновесия для линейных систем легко определяется проверкой собственных значений линейных уравнений [Braun, 1975]. Однако нелинейные системы допускают наличие нескольких точек равновесия, некоторые из них могут быть устойчивыми, а другие – неустойчивыми, и для определения их свойств требуется более общий метод анализа устойчивости.

1.4. Представление колебаний в фазовом пространстве и аттракторы

Как уже отмечалось выше, совокупность всех допустимых состояний динамической системы образует её фазовое пространство и в нем наблюдается эволюция системы. Метод анализа колебательных процессов с помощью исследования геометрии фазовых траекторий динамической системы был введен в теорию колебаний Л.И. Мандельштамом и А.А. Андроновым и с тех пор стал привычным инструментом при исследовании самых различных колебательных явлений.

Фазовое пространство можно определить как некоторое абстрактное пространство, по осям которого отложены переменные динамической системы. Размерность фазового пространства зависит от количества переменных, характеризующих динамику системы. Если переменных две, то эволюцию системы можно отобразить в декартовых координатах с переменными по двум осям, и это называется фазовым портретом системы, изображенным в фазовом пространстве. При большем количестве переменных необходимо строить проекции или сечения фазового пространства.

Фазовые портреты различных динамических систем значительно отличаются друг от друга. В случае гармонического осциллятора для простой линейной системы фазовое пространство двумерно и фазовый портрет колебаний можно отобразить на плоскости. Не рассматривая подробно, отметим, что для такой динамической системы без потерь фазовый портрет представляет собой окружность с центром в начале координат. Точка в фазовом пространстве, в которой вектор фазовой скорости обращается в нуль, называется особой, и в данном случае нуль координат есть особая точка типа центр.

Фазовый портрет рассматриваемой системы меняется, если ввести в осциллятор небольшую диссипацию. В этом случае фазовый портрет будет представлять спиральную линию, которая выходит из какой-то точки фазового пространства, соответствующей начальному состояние системы, и заканчивается в начале координат. При этом, если увеличить начальную энергию системы, то колебания осциллятора будут продолжаться дольше и обладать большей начальной амплитудой, но тем не менее временной ряд придет к нулевому значению, а фазовый портрет – в начало координат.

В этом случае в фазовом пространстве система «притягивается» к началу координат – своему состоянию равновесия, не зависимо от того, где начиналось движение системы. Такое притягивающее множество, к которому сходятся все фазовые траектории из какой-либо области фазового пространства, называется аттрактором. Аттрактор для рассматриваемой системы называется фокусом и является простейшим примером аттрактора.

В работе [Мун, 1990] поясняется, что состояния аттракторов, к которым «притягиваются» динамические системы в присутствии какого-либо затухания, когда переходные процессы подавляются, являются тремя классическими типами динамического движения: равновесие, периодическое движение или предельный цикл, квазипериодическое движение.

Отметим также, что Пуанкаре [Poincare, 1892] классифицировал типы особых точек в зависимости от характера интегральных кривых вблизи этих особых точек, т. е. в зависимости от вида корней характеристического уравнения (рис. 1.1). При этом особая точка считается устойчивой, если при возрастании времени изображающая точка интегральной кривой движется в сторону особой точки, и неустойчивой в противном случае. Если между переменными имеется соотношение типа $dx/dt = y$, то плоскость состояний называют фазовой плоскостью [Hayashi, 1964].

Возвращаясь к гармоническому осциллятору для случая большой диссипации, система также эволюционирует в фазовом пространстве к началу координат (положению равновесия), но теперь не колебательным образом, и аттрактор будет называться *узлом*.

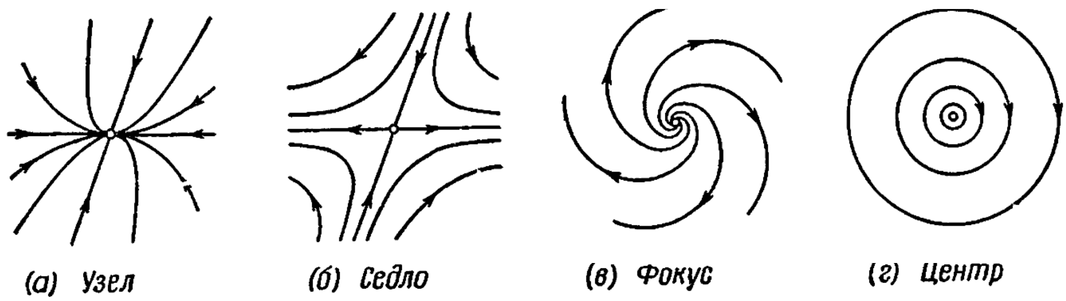


Рис. 1.1. Типы особых точек на плоскости состояний [Hayashi, 1964].

Фазовые портреты диссипативных автоколебательных систем, т. е. тех, которые демонстрируют незатухающие колебания и будут рассматриваться ниже, отображаются в виде замкнутых линий. Автоколебания являются незатухающим колебательным процессом в диссипативной системе. Они существуют при наличии какого-либо источника энергии. Как уже отмечалось выше, математическим образом автоколебаний служит предельный цикл Андронова-Пуанкаре – замкнутая изолированная траектория в фазовом пространстве, отвечающая устойчивому периодическому движению.

Заметим, что в линейной системе автоколебаний быть не может, даже если в ней имеет место отрицательное затухание. Для наличия автоколебаний связь между источником энергии и колебательным элементом в системе должна быть нелинейной. В простейших автоколебательных системах (автогенераторах), как правило, можно выделить колебательную систему с затуханием, усилитель и нелинейный ограничитель – звено «обратной связи».

Важное свойство автоколебаний – независимость вида и свойств автоколебаний от начальных условий. Их внешний вид определяется только свойствами самой автоколебательной системы. И если необходимо изменить характеристики (амплитуду, частоту, форму) автоколебаний, надо изменять свойства самой автоколебательной системы.

В фазовом пространстве образом периодических автоколебаний являются предельные циклы Пуанкаре. Предельный цикл – замкнутая фазовая траектория, к которой стремятся все соседние траектории (рис. 1.2*а, б*). Форма предельного цикла может быть различной. Главное, что предельный цикл, в отличие от фазовых траекторий гармонического осциллятора, является аттрактором, т. е. притягивает к себе траектории из других областей фазового пространства.

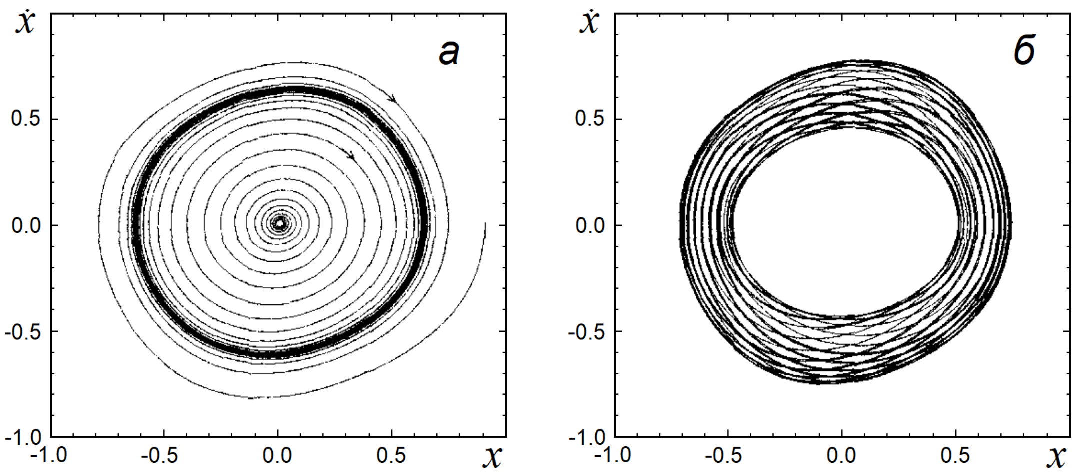


Рис. 1.2. Предельные множества осциллятора Ван дер Поля (1.8): *а* – предельный цикл, рассчитанный для значения параметра ε = 0,1; *б* – проекция двумерного тора на плоскость; численное интегрирование уравнения (1.9) для значений параметров φ = 0,1; B = 0,1; ω = 1,35; φ_0 = 0 [Анищенко, Вадивасова, 2011].

В качестве примера фазовых портретов автоколебательных систем приведем рисунок из работы [Анищенко, Вадивасова, 2011], на котором представлены фазовые портреты для двух случаев, первый из которых классический нелинейный осциллятор Ван дер Поля, описываемого уравнением вида:

$$\ddot{x} - (\varepsilon - x^2)\dot{x} + x = 0 \ . \qquad (1.8)$$

Параметр ε, характеризующий подкачку энергии в систему от внешнего источника, является существенным параметром осциллятора и называется параметром возбуждения.

Второй случай показывает типичные структуры в фазовом пространстве динамической системы, возникающей при периодическом возмущении системы с устойчивым предельным циклом. Для этого добавим в уравнение (1.8) источник гармонического действия малой амплитуды В и частоты ω, которую считаем рационально не связанной с частотой периодических колебаний самого автономного осциллятора:

$$\ddot{x} - (\varepsilon - x^2)(1 - bx^2)\dot{x} + x = B\sin(\omega t + \varphi_0)\,. \qquad (1.9)$$

Периодическая модуляция предельного цикла автономной системы приводит к тому, что фазовая траектория с заданной частотой ω вращается вокруг предельного цикла и лежит на двумерной поверхности, представляющей собой поверхность тора. Аналогично случаю предельного цикла эта поверхность будет предельным множеством, к которому стягиваются со временем все траектории из некоторой окрестности тора (как изнутри него, так и снаружи). Нетрудно представить себе, что минимальная размерность фазового пространства, в которое можно вложить двумерный тор, равна трем.

На рис. 1.2*б* показана проекция на плоскость переменных x_1, x_2 фазовой траектории на двумерном торе, полученная численным интегрированием системы (1.9).

Итак, ответ о том, какие режимы поведения могут устанавливаться в той или иной динамической системе, можно получить из анализа ее фазового портрета, который отображает совокупность всех ее траекторий в пространстве фазовых переменных (фазовом пространстве). Среди этих траекторий имеется некоторое число основных, которые и определяют качественные свойства системы. К ним относятся прежде всего точки равновесия, отвечающие стационарным режимам системы, и замкнутые траектории (предельные циклы), отвечающие режимам периодических колебаний. Будет ли режим устойчив или нет, можно судить по поведению соседних траекторий: устойчивое равновесие или цикл притягивает все близкие траектории, неустойчивое отталкивает хотя бы некоторые из них. Таким образом, «фазовая плоскость, разбитая на траектории, дает легко обозримый «портрет» динамической системы, она дает возможность сразу, одним взглядом охватить всю совокупность движений, могущих возникнуть при всевозможных начальных условиях» [Андронов и др., 1959].

1.5. Устойчивость динамических систем

Одним из важнейших свойств динамических систем является устойчивость. Под этим в литературе по динамическим системам понимается характер реакции системы на малое возмущение ее состояния. Если сколь угодно малые изменения состояния системы начинают нарастать во времени – система неустойчива. В противном случае малые возмущения затухают со временем – система считается устойчивой [Анищенко, Вадивасова, 2011]. И поскольку динамическая система определена как модель, то для случая устойчивой она может считаться адекватной, если с ее помощью удается теоретически обнаружить новые особенности поведения, зависимости и закономерности, которые затем подтверждаются экспериментально.

Приведенные выше определения являются качественными, и для оперирования с понятием неустойчивости необходимо перевести их на формальный язык математики. Основы строгой математической теории устойчивости были заложены в трудах математика А.М Ляпунова [Ляпунов, 1954–1959; Ляпунов, 1950], а дальнейшее развитие качественной теории, в том числе и теории бифуркаций динамических систем было продолжено А.А. Андроновым, В.И. Арнольдом [Андронов и др., 1959; Арнольд, 2020].

Существует довольно много различных определений устойчивости, из которых наиболее часто используются следующие: устойчивость по Пуассону, устойчивость по Ляпунову и асимптотическая устойчивость [Анищенко, Вадивасова, 2011].

Устойчивость по Пуассону означает, что если динамическая система задана системой обыкновенных дифференциальных уравнений, то через некоторое время фазовая траектория возвращается в сколь угодно малую окрестность начальной точки $\vec{x}^0{}_0 = \vec{x}^0(t_0)$. Причем, если система обратима, то возврат происходит как в прямом, так и в обратном времени. Таким образом, каждая точка устойчивой по Пуассону траектории одновременно является ее α- и ω-предельной точкой. Интервал времени, по прошествии которого траектория возвращается в окрестность точки $\vec{x}^0{}_0$ заданного радиуса ε, называется периодом возврата Пуанкаре. Времена возврата могут соответствовать периоду или квазипериоду при регулярном движении, а могут представлять собой случайную последовательность, если решение отвечает режиму динамического хаоса [Анищенко, Вадивасова, 2011; Ризниченко, 1993].

Устойчивость по Пуассону является важным, но слабым свойством устойчивости. В этом случае нельзя сделать вывод о поведении соседних траекторий, изначально близких к $\vec{x}^0(t_0)$. В практических задачах нас чаще всего интересует другое свойство устойчивости, связанное с малым возмущением заданной траектории [Анищенко, Вадивасова, 2011].

В зависимости от поведения малого возмущения во времени различают устойчивость по Ляпунову и асимптотическую устойчивость. Траектория $\vec{x}^0(t_0)$ называется устойчивой по Ляпунову, если для любого произвольно малого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любой траектории $\vec{x}(t)$, для которой $||\vec{x}(t_0) - \vec{x}^0(t_0)|| < \delta$, при всех $t > t_0$ выполняется неравенство $||\vec{x}(t) - \vec{x}^0(t)|| < \varepsilon$. Символ $||\ldots||$ обозначает норму (длину вектора) в R^N. Таким образом, малое начальное возмущение устойчивых по Ляпунову фазовых траекторий не возрастает с течением времени [Анищенко, Вадивасова, 2011; Ризниченко, 1993].

Если малое возмущение δ со временем уменьшается, то есть $||\vec{x}(t) - \vec{x}^0(t)|| \to 0$ при $t \to \infty$, то траектория обладает более сильной устойчивостью, а именно асимптотической устойчивостью. Любая асимптотически устойчивая фазовая траектория устойчива по Ляпунову.

Свойства устойчивости фазовых траекторий, принадлежащих предельным множествам (например, аттракторам), имеют особую важность при исследовании динамики систем. Изменение характера устойчивости того или другого предельного множества во многих случаях приводит к смене режима функционирования системы [Анищенко, Вадивасова, 2011].

1.6. Бифуркация динамических систем

При анализе поведения динамической системы представляет интерес влияние на него изменения параметров системы и, как следствие изменение интегральных кривых фазового портрета. В [Андронов и др., 1959] показано, что при малом изменении параметров общий вид интегральных кривых будет претерпевать только количественные изменения, и лишь при некоторых особых, так называемых бифуркационных изменениях параметров, будут наблюдаться качественные изменения характера интегральных кривых.

Определим понятие бифуркации, при которой происходит перестройка характера движения (колебаний) динамической системы. Бифуркация – это приобретение нового качества в движениях динамической системы при малом изменении ее параметров. Иначе говоря, это изменение фазового портрета динамической системы при изменении входящего в уравнение параметра [Горяченко и др., 2014]. В нелинейных системах при изменении параметров допустима конечная (или бесконечная) бифуркация, приводящая к появлению динамического хаоса.

Основы теории бифуркации заложены А. Пуанкаре и А.М. Ляпуновым в начале XX века, затем эта теория была развита А.А. Андроновым. Знание основных бифуркаций позволяет существенно облегчить исследование реальных систем и, в частности, предсказать характер новых движений, возникающих в момент перехода системы в качественно другое состояние, оценить их устойчивость и область существования.

Различают несколько типов бифуркаций. Так, если единственный центр динамической системы преобразуется в седловую точку, в центре координат и два центра, то такой тип бифуркации называется вилы [Мун, 1990]. Другой тип бифуркации связан с появлением в системе предельных циклов, происходящих при изменении некоторого управляющего параметра. В этом случае возникает периодическое движение, которое и называется предельным циклом. Каскад бифуркаций, называемый также последовательностью Фейгенбаума [Feigenbaum, 1978] или бифуркацией удвоения периода, является одним из типичных сценариев перехода от порядка к хаосу, от простого периодического режима к сложному апериодическому при бесконечном удвоении [Кузнецов, 2001].

Выделяют локальные и нелокальные бифуркации динамических систем. Локальные бифуркации связаны с локальной окрестностью траектории на предельном множестве. Они отражают изменение устойчивости как отдельных траекторий, так и всего предельного множества целиком и могут свидетельствовать об исчезновении исследуемого предельного множества в результате его слияния с другим предельным множеством. Все нелокальные бифуркации связаны с поведением многообразий предельных седловых множеств, в частности, с образованием сепаратрисных петель, гомоклинических и гетереклинических кривых, а также с возникновением касания аттрактора и сепаратрисной кривой или поверхности [Анищенко, Вадивасова, 2011].

Работы французского и британского математиков Рене Тома и Кристофера Зимана [Thom, 1972; Zeeman, 1977] по теории катастроф послужили причиной для выделения жестких и мягких бифуркаций. В случае мягкой бифуркации исходное стационарное состояние системы теряет устойчивость и рождаются два новых устойчивых стационарных состояния. При этом вновь появившиеся два стационарных состояния расположены в непосредственной близости от исходного состояния, которое потеряло устойчивость. Бифуркации такого типа называют мягкими, поскольку вновь родившийся режим функционирования системы как бы появляется из режима, потерявшего устойчивость, и сосуществует рядом с ним.

В другом случае при значении параметра затухания $\alpha < \alpha^*$ система находится в устойчивом стационарном состоянии. При этом существует еще одно, неустойчивое состояние (α^* параметр затухания для близко расположенного неустойчивого состояния). В точке бифуркации $\alpha = \alpha^*$ устойчивое и неустойчивое состояния сливаются в одно. Далее они исчезают и система выбирает новый режим, который существенно отличается от предыдущего и не находится в непосредственной близости от исходного режима. Такой тип бифуркаций называют жестким, и именно жесткие бифуркации явились предметом анализа в теории катастроф [Анищенко, Вадивасова, 2011].

1.7. Осциллятор Дуффинга

Уравнение Дуффинга в его различных формах используется для описания многих нелинейных систем. Хотя большинство физических систем не могут быть точно описаны таким образом для широкого диапазона рабочих условий, таких как частота и амплитуда возбуждения. Во многих случаях можно использовать это уравнение в качестве приближенного описания, чтобы их поведение можно было качественно изучить. В некоторых ситуациях количественный анализ может быть проведен для малых амплитуд возбуждения. Чаще всего это первый шаг в переходе от линейной системы к нелинейной [The Duffing …, 2011].

Следует отметить, что физические системы, обсуждаемые в этой работе, могут быть представлены различными формами уравнения Дуффинга и безразмерные коэффициенты в уравнениях связаны с совершенно различными физическими свойствами в системах, которые они моделируют.

Выше уже приводилось уравнение Дуффинга, здесь рассмотрим его несколько подробнее. Это дифференциальное уравнение, как оно представлено в работе [Rand, 2004], имеет вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x + \mu\alpha x^3 = 0,\ \mu > 0 \qquad (1.10)$$

и называется осциллятор Дуффинга. Это модель структурной системы, которая включает в себя нелинейные восстанавливающие силы (например, пружины). Оно иногда используется в качестве аппроксимации для маятника.

Чтобы понять динамику уравнения Дуффинга (1.10), мы начнем с того, что запишем его как систему уравнений первого порядка, используя известную теорему Коши:

$$\frac{dx}{dt} = y\,, \qquad \frac{dy}{dt} = -x - \mu\alpha x^3. \tag{1.11}$$

Для данного начального условия (x (0), y(0)), система (1.11) задает траекторию в фазовой плоскости x-y, т. е. движение точки во времени. Интегральная кривая, по которой движется точка, удовлетворяет обычному дифференциальному уравнению:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-x-\mu\alpha x^3}{y}. \tag{1.12}$$

Уравнение (1.12) может быть легко проинтегрировано.

$$\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \mu\alpha\frac{x^4}{4} = cont\,. \tag{1.13}$$

Решение (1.13) соответствует физическому принципу сохранения энергии. В том случае, когда значение α положительно, решение (1.13) представляет собой континуум замкнутых кривых, окружающих начало координат. Каждая из этих кривых представляет собой движение, описываемое уравнением (1.10), которое является периодическим во времени. В случае, когда значение α отрицательно, все движения, которые начинаются достаточно близко к началу координат, являются периодическими. Однако в данном случае уравнение (1.11) имеет две дополнительные точки равновесия помимо начала координат, а именно $x = \pm 1/\sqrt{-\mu\alpha}$, $y = 0$. Интегральные кривые, проходящие через эти точки, отделяют периодические движения от движений, которые становятся неограниченными. Такие интегральные кривые называются сепаратрисами.

Если численно интегрировать уравнение (1.10), мы увидим, что период периодических движений зависит от того, на какой замкнутой кривой в фазовой плоскости мы находимся. Этот эффект характерен для нелинейных колебаний и называется зависимостью периода от амплитуды.

При изучении морских динамических систем исследователи обычно сталкиваются с тем, что на описываемую колеблющуюся систему, например, льдину на морской воде, воздействует внешняя возбуждающая сила – морское волнение. В этом случае необходимо использовать осциллятор Дуффинга с внешним периодическим воздействием, который описывается дифференциальным уравнением вида:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x + \mu c\frac{dx}{dt} + \mu\alpha x^3 = \mu F\cos\omega t. \tag{1.14}$$

Здесь F – амплитуда внешнего воздействия, ω – частота колебаний внешнего воздействия. Такое уравнение обычно используется для моделирования затухающей упругой системы с внешним воздействием, когда смещения достаточно велики, чтобы сделать нелинейные упругие эффекты значительными. В отличие от невынужденного уравнения Дуффинга (1.10), уравнение (1.14) неавтономно, то есть время t явно фигурирует в уравнении в термине $\cos \omega t$. Фазовая плоскость больше не является подходящей ареной для исследования этого уравнения, поскольку векторное поле в данной точке изменяется во времени, позволяя траектории вернуться в эту точку и пересечься. Однако эту систему можно сделать автономной, понизив порядок на единицу:

$$\frac{dx}{dt} = y, \tag{1.15}$$

$$\frac{dy}{dt} = -x - \mu c y - \mu \alpha x^3 + \mu F \cos z, \tag{1.16}$$

$$\frac{dz}{dt} = \omega. \tag{1.17}$$

Эта система трех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка определяется на фазовом пространстве с топологией $R^2 \times S$, где окружность S строится исходя из того, что векторное поле (1.15–1.17) является 2π-периодическим по z.

При математическом моделировании динамических систем часто используется отображение (сечение) Пуанкаре. Для анализа рассматриваемого трехмерного потока (1.15–1.17) в двух измерениях построение отображения Пуанкаре M осуществляется пересечением потока с поверхностью сечения Σ, которое можно записать как $\Sigma : z = 0 \pmod{2\pi}$. При этом отображение Пуанкаре $M : \Sigma \to |\Sigma$ определяется следующим образом: задается точка p на Σ, которая используется в качестве начального условия для потока (1.15–1.17). Допустим, что результирующая траектория эволюционирует во времени до $z = 2\pi$, то есть до тех пор, пока она снова не пересечет поверхность Σ, на этот раз в некоторой точке q. тогда M отображает p в q. Заметим, что неподвижная точка сечения Пуанкаре соответствует 2π-периодическому движению потока.

Отображение Пуанкаре позволяет определить тип движения динамической системы – периодическое, квазипериодическое или хаотическое. Оно является мощным инструментом при изучении хаотических колебаний [Мун, 1990].

1.8. Осциллятор Ван дер Поля

Одна из главных тенденции в живом мире – тенденция к достижению общих ритмов взаимного поведения – тенденция к синхронизации. С различными проявлениями синхронизации можно встретиться в физике, биологии, химии, технике, экономике, медицине и т. д. Возможна синхронизация как двух элементов, так и в ансамблях, состоящих из сотен и тысяч элементов [Осипов, Половинкин, 2005]. Так, в океанологии, гидрофизике исследуется поведение различных типов морских волновых процессов и их взаимодействие; в морском транспорте изучается воздействие морских волн на суда, которые, к тому же, имеют собственные периоды качки. Представляет интерес синхронизация этих процессов.

В настоящей работе описывается явление синхронизации осцилляторов – резонансных акваторий и колебаний судов внешней периодической силой – волнами разных типов, т. е. явление вынужденной синхронизации. В классической теории синхронизации регулярный (нехаотический) осциллятор, управляемый периодическим сигналом, – главная и исторически первая изученная модель [Пиковский и др., 2003]. Можно считать, что классическая теория синхронизации была в основном построена к 60-м годам прошлого столетия. В настоящее время имеются всесторонние обзоры и книги, где эта теория представлена подробно (см., например, [Пиковский и др., 2003]). Поэтому в данной главе только кратко представлены основные положения теории вынужденной синхронизации периодических осцилляторов, а основное внимание уделяется изучению вынужденной фазовой синхронизации в хаотических системах. При этом особо обсуждаются общие свойства периодической синхронизации и фазовой хаотической синхронизации.

Рассмотрим уравнение Ван дер Поля несколько подробнее. Итак, дифференциальное уравнение, как оно представлено в работе [Rand, 2004], имеет вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x - \mu(1 - x^2)\frac{dx}{dt} = 0, \ \mu > 0 \tag{1.18}$$

и называется осциллятор Ван дер Поля. Это модель неконсервативной системы, в которой энергия добавляется к системе и вычитается из нее автономным образом, что приводит к периодическому движению, называемому предельным циклом. Здесь мы видим, что знак демпфирующего члена – $\mu(1 - x^2)\frac{dx}{dt}$ изменяется в зависимости от того, является ли $|x|$ больше или меньше единицы. Уравнение Ван дер Поля имеет много применений, например, в качестве модели для флаттера и многочисленных биологических осцилляторов, исследования синхронизации в радиотехнике и др.

Численное интегрирование уравнения (1.18) показывает, что каждое начальное условие (кроме $x = dx/dt = 0$) приближается к уникальному периодическому движению. Характер этого предельного цикла зависит от величины μ. При малых значениях μ движение является почти синусоидальным, тогда как при больших значениях μ это релаксационное колебание, то есть оно имеет тенденцию напоминать ряд ступенчатых функций, скачущих между положительными и отрицательными значениями дважды за цикл.

Уравнение (1.18) для численных расчетов проще представлять как систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dx}{dt} = -x + \mu(1 - x^2)y. \tag{1.19}$$

В работе [Rand, 2004] и других авторов отмечается, что точного решения в замкнутой форме для этой системы уравнений не существует. Численное интегрирование показывает, что предельный цикл представляет собой замкнутую кривую, охватывающую начало координат в фазовой плоскости x - y. От того, что уравнения (1.19) инвариантны при преобразовании $x \to -x,\ y \to -y$, можно заключить, что кривая, представляющая предельный цикл, является точкой, симметричной относительно начала координат.

Также, как и для случая использования осциллятора Дуффинга для описания волновых движений в море, так и для осциллятора Ван дер Поля обычно используется модель с внешним воздействием, поскольку на морскую динамическую систему воздействует приходящее волнение. Представляет интерес синхронизация системы этим воздействием для определения периодов колебаний или вибраций такой системы.

Дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x - \mu(1 - x^2)\frac{dx}{dt} = \mu F \cos \omega t\, 0 \tag{1.20}$$

называется осциллятором Ван дер Поля с внешним воздействием (в англоязычной литературе обычно используется термин forced – форсированный или вынужденный). Это модель для ситуаций, в которых на систему, способную к автоколебаниям, воздействует другой осциллятор, в данном случае представленный в виде внешнего периодического процесса $\mu F \cos \omega t$.

Отметим, что если осциллятор Дуффинга с затуханием подвергается внешнему периодическому воздействию, то результатом может быть периодическая реакция на той же частоте, что и воздействующая функция. Поскольку невынужденные (собственные) колебания рассеиваются из-за затухания, то они отсутствуют в стационарном вынужденном поведении [Rand, 2004].

В случае осциллятора с предельным циклом и периодическим внешним воздействием можно ожидать, что стационарный вынужденный отклик может включать как невынужденное предельное циклическое колебание, так и отклик на частоте внешнего воздействия. Однако, если амплитуда внешнего воздействия достаточно большая и разность частот между невынужденным предельным циклом колебаний и внешними воздействующими колебаниями достаточно мала, то отклик может проявляться только на частоте внешнего воздействия. В этом случае невынужденные колебания гасятся внешними и происходит захват частоты колебаний системы с предельным циклом, и система, как говорят, будет заблокирована по фазе или частоте, или просто заблокирована [Rand, 2004].

Отметим, что при больших отличиях вынуждающей и собственных частот в системе Ван дер Поля, как показано в работе [Moon, 1987], появляется новое явление – комбинационные колебания, которые иногда называют почти периодическими или квазипериодическими. Комбинационные колебания имеют вид:

$$x = b_1 \cos \omega_1 t + b_2 \cos \omega_2 t\ . \tag{1.21}$$

Когда частоты ω_1 и ω_2 несоизмеримы, т. е. ω_1 / ω_2 – иррациональное число, решение называется квазипериодическим. Для уравнения Ван дер Поля $\omega_2 \equiv \omega_0$, где ω_0 – частота предельного цикла свободных колебаний.

Поскольку такие колебания не являются периодическими, их можно спутать с хаотическими, но они таковыми не являются. Для них спектр Фурье решения (1.21) состоит из двух пиков при $\omega = \omega_1$, ω_2, в то время как хаотические решения имеют широкий непрерывный спектр.

1.9. Динамический хаос

До сих пор рассматривались три типа асимптотического поведения, производимого динамическими системами: а) система притягивается к одному притягивающему состоянию; б) система притягивается к предельному циклу и колеблется бесконечно вдоль некоторой периодической орбиты; в) система перемещается за пределы любой границы в бесконечность. Однако некоторые динамические системы могут демонстрировать периодическое поведение, которое не подпадает ни под одну из вышеперечисленных трех категорий. Эта новая категория странных аттракторов порождается хаотическими динамическими системами [Busemeyer, 2000].

Хаотическое поведение может возникать из того, что кажется чрезвычайно простыми динамическими моделями. Для возникновения хаоса в динамической системе необходимо, чтобы в фазовом пространстве системы [Безручко и др., 2010]:

- все (или почти все) соседние траектории внутри некоторой области разбегались; т. е. малый разброс начальных отклонений ε вел к тому, что при достаточно большом t уже нельзя было точно определить состояние системы, которая может находиться в любой точке области σ (рис. 1.3);
- все траектории оставались внутри ограниченного фазового объема.

Для консервативных динамических систем (т. е. систем без потерь), для которых их фазовый объем (с некоторой плотностью) по определению сохраняется, справедлива теорема Пуанкаре о возвращении, которая гласит, что почти каждая точка любой области фазового пространства, двигаясь по траектории, вернется в эту область.

Объект в фазовом пространстве, к которому стремятся все или почти все траектории и на котором они неустойчивы, называется странным аттрактором, в отличие от простых состояний равновесия и предельных циклов. Странный аттрактор – объект, в котором траектории по одним направлениям разбегаются, по другим – притягиваются. Заметим, что в простых аттракторах есть только притяжение.

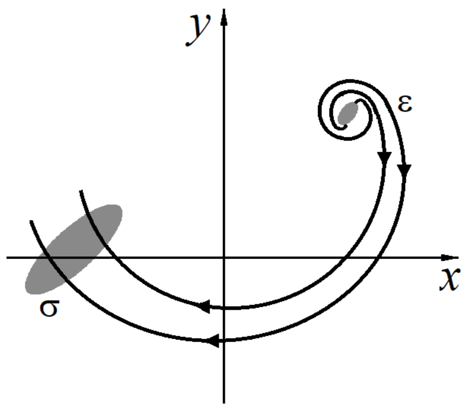


Рис. 1.3. Эволюция начального распределения на фазовой плоскости в случае неустойчивого состояния равновесия [Путь в синергетику, 2010].

Странные аттракторы не являются гладкими кривыми или поверхностями, но имеют «не целую размерность», являются фрактальными объектами [Рюэль, 2001], т. е. обладающими свойством самоподобия. Движение на странном аттракторе показывает зависимость от начальных условий. При том, что странные аттракторы имеют лишь конечную размерность, временной анализ частот выявляет континуум частот. Возникла новая парадигма, которая получила имя хаос, данное ей Джимом Йорке [Alligood, 1997].

В 1971 году было обнаружено свойство решений уравнений типа $x_{n+1} = \lambda f(x_n)$: при изменении параметра λ существующее периодическое решение, имеющее период T, теряет устойчивость, а устойчивым становится решение с периодом $2T$, затем $4T$ и т. д. Интервал изменения параметра λ, в пределах которого цикл периода 2^n устойчив, быстро сужается. Все значения λ, в которых происходит бифуркация удвоения периода, сгущаются к некоторому значению $\lambda = \lambda_{кр}$. Как только λ становится больше $\lambda_{кр}$ внутри некоторой области фазового пространства, оказывается бесконечное число неустойчивых циклов. Вслед за этим сложным образованием сразу появляется хаотический (странный) аттрактор.

На основании этого и с учетом выводов работы Д. Рюэля и Ф. Такенса [Ruelle, Takens, 1971], связывающих возникновение турбулентности с появлением странного аттрактора, который возникал после небольшого числа (трех) бифуркаций, в 1976 году американский специалист в области математической и теоретической физики Митчел Фейгенбаум [Feigenbaum, 1978] установил, что сценарий перехода к хаосу через бесконечный каскад бифуркаций удвоения периода универсален для большого класса динамических систем. Более того, последовательность удвоений обладает свойством универсальности, которое не зависит от конкретных особенностей системы, а во многих случаях и от размерности фазового пространства.

Фейгенбаум определил, что значения параметров λ, соответствующие каждому удвоению, сходятся как геометрическая прогрессия и расстояние между значениями параметра λ_n, при котором рождается цикл периода 2^n, и значением $\lambda_{кр}$, вслед за которым в системе возникает хаос, удовлетворяет условию $(\lambda_{кр} - \lambda_n) = \text{const}\ \delta^n$. Это означает, что если в эксперименте обнаружены несколько первых удвоений, то можно предсказать значение $\lambda_{кр}$, после достижения которого рождается хаос. Теория Фейгенбаума основана на методе ренормализационной группы, использовавшемся ранее для объяснения универсальных законов физики фазовых переходов, квантовой теории поля и др.

Существуют и другие сценарии возникновения хаоса, такие как перемежаемость и разрушение квазипериодических колебаний. Наиболее часто встречающийся в приложениях переход к хаосу – перемежаемость, ее впервые описали французские физики П. Манневиль и И. Помо [Pomeau, Manneville, 1980]. На осциллограмме колебаний, приведенной в этой работе, перемежаемость выглядит как постепенное (при изменении параметра) исчезновение периодических колебаний за счет их прерывания хаотическими всплесками.

1.10. Асимптотические методы

Рассматривая нелинейные осцилляторы, нельзя не остановиться на приближенных (асимптотических) методах решения дифференциальных уравнений, описывающих их колебания, поскольку, как отмечено выше, точного решения в замкнутой форме для системы уравнений (1.19) не существует. Авторы работ [Боголюбов, Митропольский, 1958; Кузнецов и др., 2002; Авраменко, 2010] также считают, что случаи, когда удается найти точные решения в явной аналитической форме для нелинейных дифференциальных уравнений, являются, скорее, исключением из правил. Здесь мы кратко рассмотрим эту проблему, а читателя, интересующегося подробностями, отсылаем к перечисленным выше работам.

В теории колебаний разработан богатый арсенал асимптотических методов. Наиболее часто используемыми из них являются методы: разложение по степеням параметра нелинейности, Линштедта–Пуанкаре, многих масштабов и Ван дер Поля.

Разложение по степеням параметра нелинейности

Данный простой метод, использующий прямое разложение по степеням малого параметра, далеко не всегда приводит к результату. В работе [Кузнецов и др., 2002] он рассмотрен на примере осциллятора Дуффинга с кубической нелинейностью, записанного в виде:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = 0. \tag{1.22}$$

Пусть известен некоторый характерный масштаб колебаний A. Введем безразмерные время и координату следующим образом:

$$t' = \omega_0 t, \quad x' = x/A\,. \tag{1.23}$$

Уравнение (1.22) после этого принимает вид (штрихи у безразмерных переменных опускаем):

$$\ddot{x} + x + \varepsilon x^3 = 0\,, \tag{1.24}$$

где теперь $\varepsilon = \beta A^2/\omega^2_0$. При этом рассматриваем случай слабой нелинейности, означающий, что $\varepsilon << 1$. Теперь ищем решение в виде ряда по степеням малого параметра ε [Кузнецов и др., 2002]:

$$x(t) = x_1(t) + \varepsilon\, x_2(t) + \varepsilon^2\, x_3(t) + \ldots, \tag{1.25}$$

считая $x_{1,2\ldots}$ величинами порядка единицы. Такой прием обычно называют методом разложения по малому параметру или прямым разложением.

Не приводя промежуточных преобразований, выполненных в [Кузнецов и др., 2002] запишем решение в окончательном виде с точностью до членов второго порядка малости, как это сделано в вышеупомянутой работе:

$$x \approx a\cos(\omega t + \varphi) + \varepsilon\left[-\frac{3a^3 t}{8}\sin(\omega t + \varphi) + \frac{a^3}{32}cos3(\omega t + \varphi)\right] + \cdots, \tag{1.26}$$

где амплитуда a и начальная фаза φ – постоянные, определяемые из начальных условий.

Видно, что как бы ни был мал параметр ε, с течением времени второй член в решении (1.26), неограниченно нарастая, становится больше первого, и тогда справедливость разложения (1.25) на больших временах нарушается, значит, разложение не является равномерно пригодным по t. Однако, как показано в [Кузнецов и др., 2002], решения уравнения Дуффинга имеют вид периодических нелинейных колебаний, и никакого нарастания амплитуды со временем нет.

Метод Линштедта–Пуанкаре

Поскольку описанный выше метод оказался непригодным для приближенного решения уравнения Дуффинга с кубической нелинейностью, необходимо изменить схему решения так, чтобы учесть неизохронность. Для этого А. Линштедтом и А. Пуанкаре [Кузнецов и др., 2002] был предложен простой способ. Была введена новая временная переменная $\tau = \omega t$, тогда $d/dt = \omega d/d\tau$ и, подставляя ее в уравнение (1.24), получим

$$\omega^2\ddot{x} + \dot{x} + \varepsilon x^3 = 0. \tag{1.27}$$

Для этого уравнения в [Кузнецов и др., 2002] ищется решение в виде разложений в степенной ряд как для переменной x, так и для частоты ω, которое в окончательном виде с точностью до членов порядка ε^2 записывается следующим образом:

$$x \approx a\cos(\omega t + \varphi) + \frac{\varepsilon a^3}{32}\cos 3(\omega t + \varphi)\,, \tag{1.28}$$

$$\omega \approx 1 + \frac{3\varepsilon a^3}{8}\,. \tag{1.29}$$

Здесь, если параметр $\varepsilon > 0$, то частота колебаний растет с ростом амплитуды, при $\varepsilon < 0$ частота, наоборот, уменьшается.

Метод многих масштабов

Полученное выше приближенное решение (1.28) с использованием метода Линштедта–Пуанкаре, можно представить в виде [Кузнецов и др., 2002]:

$$x \approx a\cos\left(\omega t + \frac{3a^2\varepsilon t}{8} + \varphi\right) + \frac{\varepsilon a^3}{32} cos\left(3\omega t + \frac{9a^2\varepsilon t}{8} + 3\varphi\right). \tag{1.30}$$

Зависимость от времени входит в это выражение двояким образом: $x = x(t, \varepsilon t)$. Поскольку ε является малым параметром, зависимость от εt можно интерпретировать как медленное изменение параметров колебания. Продолжая разложение до более высоких порядков малости, придем к представлению решения в виде $x = x(t, \varepsilon t, \varepsilon^2 t, \varepsilon^3 t,\ldots)$.

Идея перехода от единственного времени к набору переменных лежит в основе метода многих масштабов (или метода многомасштабных разложений), позволяющего получать решения широкого класса задач теории колебаний.

Метод Ван дер Поля

Этот метод представляет собой простейший вариант *метода усреднения*. Он был разработан Б. Ван дер Полем для исследования различных автоколебательных процессов в ламповом генераторе [Van der Pol, 1920]. Математическое обоснование этого метода было дано Л.И. Мандельштамом и Н.Д. Папалекси [Мандельштам, Папалекси, 1934]. Дальнейшее развитие метод усреднения получил в работах Н.М. Крылова, Н.Н. Боголюбова, Ю.А. Митропольского и др. Этот метод был распространен на новые типы задач, как, например, изучение динамических систем с внешним периодическим возмущением. Здесь авторы придерживаются описания метода, изложенного в работах [Миропольский, 1971; Моисеев, 1986; Кузнецов и др., 2002].

Рассмотрим уравнение Дуффинга, представленное в виде

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \beta x^3 = 0 \ . \tag{1.31}$$

Формально малый параметр здесь мы не вводим, однако будем считать, что β, $\gamma \ll 1$, т. е. система близка к уравнению линейного консервативного осциллятора. Вообще, близость к линейной консервативной системе является условием применимости метода Ван дер Поля. Это позволяет представить решение в виде

$$x = A(t)\ e^{it} + A(t)\ e^{-it}\ , \tag{1.32}$$

где $A(t)$ – медленно меняющаяся по сравнению с e^{it} – комплексная амплитуда (в связи с чем этот метод называют также методом медленно меняющихся амплитуд). Нетрудно подсчитать, что

$$\dot{x} = \dot{A}e^{it} + iAe^{it} + \dot{A}^*e^{-it} - iA^*e^{-it}\,. \tag{1.33}$$

Отметим, что вместо одной зависимой переменной x по сути введены две: A и A^*. Поэтому можно наложить между этими величинами дополнительную связь. Удобно потребовать, чтобы

$$\dot{A}e^{it} + \dot{A}^*e^{-it} = 0\ . \tag{1.34}$$

Тогда уравнение (1.33) упрощается:

$$\dot{x} = i\dot{A}e^{it} - iA^*e^{-i}\ . \tag{1.35}$$

Продифференцируем это уравнение ещё раз и, выполняя преобразования, изложенные в работе [Кузнецов и др., 2002], получим укороченное уравнение вида:

$$\dot{A} + \gamma A - \frac{3i\beta|A|^2A}{2} = 0. \tag{1.36}$$

Это уравнение с точностью до обозначений совпадает с уравнением, полученным методом многих масштабов.

Отметим, что метод многих масштабов позволяет продвинуться дальше, поскольку с его помощью мы не только определили эволюцию медленно меняющихся амплитуды и фазы, но и нашли компоненту на частоте третьей гармоники. Кроме того, мы могли бы продолжать разложения до более высоких порядков малости, каждый раз все больше и больше уточняя решение. Впрочем, метод усреднения также допускает соответствующее обобщение (так называемый метод Крылова–Боголюбова). Этот метод имеет много общего с методом многих масштабов; подробно останавливаться на нем не будем.

Метод Ван дер Поля в настоящее время широко используется для упрощенного решения дифференциальных нелинейных уравнений, поскольку он достаточно прост и позволяет заменить систему уравнений упрощенной системой, полученной усреднением правых частей по быстрому переменному. Для формального применения метода Ван дер Поля не требуется, в отличие от других методов, асимптотического приближения никаких ограничительных предположений о природе сил, под действием которых происходит колебательный процесс. Также метод может быть использован как для исследования установившихся движений, так и для переходных процессов [Моисеев, 1986].

ГЛАВА 2

Хаотические колебания в бухте при внешнем периодическом воздействии

Через морские порты Сахалинской области, основные из которых Холмск и Корсаков, осуществляется доставка большей части грузов на остров, прежде всего посредством паромной переправы Ванино–Холмск. Соответственно, от устойчивой работы этих портов зависит товарооборот и состояние ряда важнейших отраслей экономики Сахалинской области. Для безопасной эксплуатации существующих гидротехнических сооружений, особенно при проектировании новых объектов, в том числе связанных с работой паромной переправы, необходимо иметь достаточно точные характеристики опасных морских явлений.

Наблюдения за волнением и метеообстановкой проводились в Холмской бухте в течение нескольких лет с использованием как кабельных, так и автономных регистраторов волнения. В 2006 году при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06-05-96157 «Экспериментальное исследование опасных морских явлений в порту Холмск Сахалинской области») был организован эксперимент, ориентированный прежде всего на изучение особенностей волнового режима Холмской бухты, который позволил получить большой объем данных наблюдений за волнением.

Полученные временные ряды для различного уровня волнения на море показали наличие стабильных собственных резонансных колебаний уровня моря на периодах около трех и восьми минут, соответствующих сейшам бухты. Они хорошо выделяются в спектрах волнения для любого состояния моря. И с увеличением энергии волнения моря их энергия также возрастает и хорошо заметна на фоне волнового шума.

Однако при очень сильном шторме, наблюдавшемся 23.11.2006 года энергетические пики в спектрах с периодами около трех и восьми минут практически не выделяются на фоне шума. Авторы предположили, что данная ситуация связана с переходом волнения в портовой бухте в хаотические колебания. Проверка данного предположения была сделана с использованием нелинейной модели Дуффинга, которая подтвердила высказанное предположение и показала, что при входе в бухту волнения с периодами зыби, возбуждающем сейши, возможно проявление хаотического режима волнения.

2.1. Организация эксперимента и данные наблюдений

Эксперимент проводился с 26 июля 2006 путем установки в мареографном посту порта Холмск у паромного причала № 3 измерительного комплекса, состоящего из пьезорезонансного донного датчика гидростатического давления, кабельной линии связи, платы таймера-счетчика PCI 1780, персонального компьютера, цифровой метеостанции WS 2300 и блока бесперебойного питания. На рис. 2.1. представлена карта акватории порта г. Холмск и показано расположение измерителя волнения.

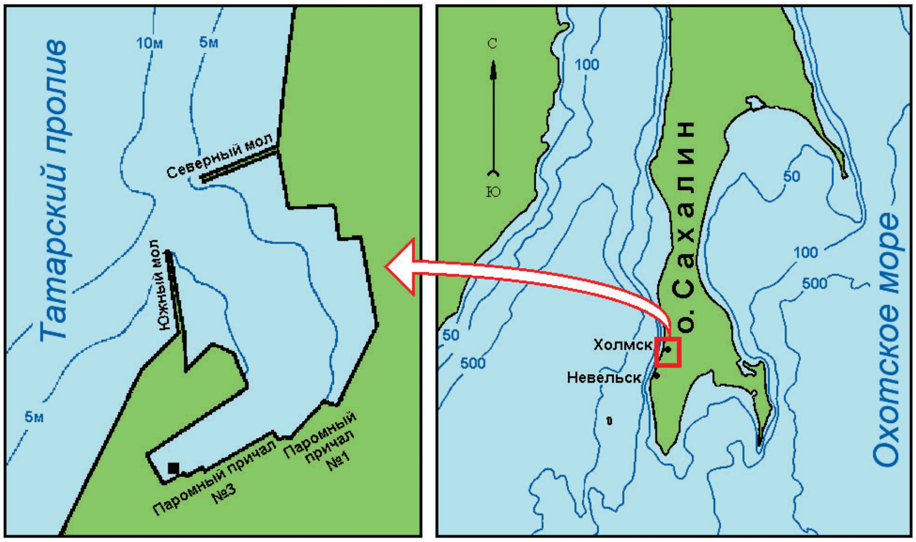


Рис. 2.1. Карта района и акватории порта города Холмск и расположение основных портовых сооружений. Квадратом указано положение регистратора волнения в 2006 г.

Регистрация волновых процессов в бухте порта Холмск осуществлялась с дискретностью 2 с и, в связи с большим объемом поступающей информации, данные накапливались в виде суточных файлов на жестком диске компьютера. Одновременно с обработкой материалов колебаний уровня осуществлялся прием данных с цифровой метеостанции (дискретность измерения метеорологических параметров составляла 1 мин).

Измерения проводились в течение длительного периода времени, что позволило оценить характеристики волновых процессов как в спокойную погоду, так и в период сильных осенних штормов. В ходе исследования были получены записи колебаний уровня моря у паромного причала № 3 в колодце стандартного мареографа и рядом с ним. На рис. 2.2 приведены фрагменты записей колебаний уровня моря для различных метеорологических условий и состояния волнения на море.

Измерения 16.11.06 и 26.11.06 производились при спокойных погодных условиях, и волновые движения в бухте были незначительными, амплитуда колебаний составляла 2–3 см. 17.10.06 измерения проводились при усилении ветра и достаточно заметном волнении (по наблюдениям на ГМС Холмск Сахалинского управления Росгидромета высота волн на входе бухты достигала 2.5 м). Аналогичная картина наблюдалась 12.11.06 и 22.11.06, когда наблюдались самые большие значения скорости ветра южных румбов, хотя его продолжительность была сравнительно невелика. Высота ветрового волнения в этот день по визуальным наблюдениям достигала значительной для этого района величины – 3.5 м.

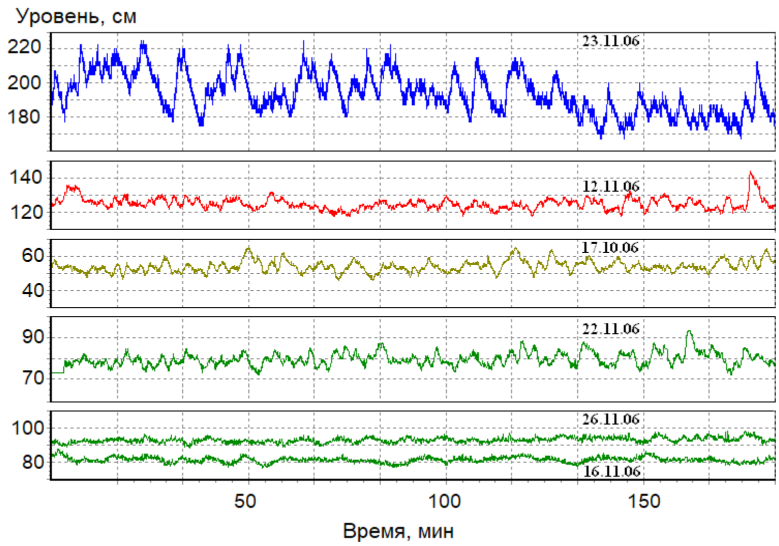


Рис. 2.2. Фрагменты записей колебаний уровня моря для различного волнения на море: 26.11.06 – тихая погода, 17.10.06 – волна 2.5 м, 12.11.06 и 22.11.06 – волна 3.5 м, 23.11.06 – сильный шторм.

Отрезок записи, относящийся к 23.11.06, значительно отличается от остальных, уровень колебаний в бухте даже по сравнению со случаями сильного волнения вырос примерно в два раза, причем характерный для всех остальных случаев достаточно регулярный характер колебаний с выраженной периодичностью нарушился. Как уже отмечалось выше, 22–24 ноября был зафиксирован сильный и устойчивый ветер южных румбов, который сохранял свою силу в течение трех суток. Отметим, что за сутки до этого наблюдался достаточно сильный северный ветер, потом произошла резкая смена воздушного потока. На акватории порта был сильный шторм.

Для рассмотренных выше фрагментов записей были рассчитаны энергетические спектры, приведенные на рис. 2.3. Видно, что спектры колебаний уровня для развитого волнения на море с высотами волн 2.5–3.5 м (17.10.06, 12.11.06 и 22.11.06) имеют схожий характер. Их отличает повышение уровня энергии на периодах более 1.5 мин, по сравнению со спектрами для тихой погоды (16.11.06 и 26.11.06). При этом различие в энергии колебаний превышает порядок на периодах от 2 до 15 мин, которые относятся к диапазону существования резонансных колебаний в бухте [Ковалев и др., 2007; Ковалев, 2012].

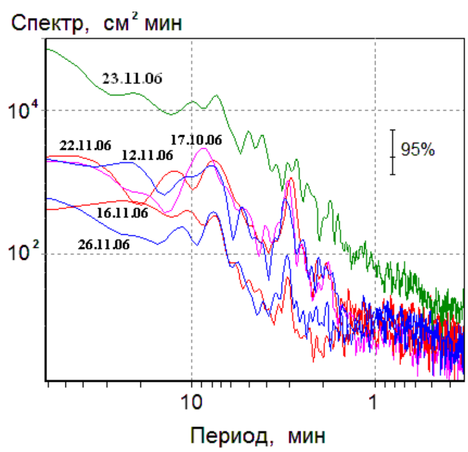


Рис. 2.3. Энергетические спектры колебаний уровня для фрагментов записей представленных на рис. 2.1 и различного волнения на море: 16.11.06 и 26.11.06 – тихая погода, 17.10.06 – волна 2.5 м, 12.11.06 и 22.11.06 – волна 3.5 м, 23.11.06 – сильный шторм. Число степеней свободы 32.

Как следует из рис. 2.3, наиболее ярко выражены резонансные колебаниями с периодами около 3 и 8 мин. Для этих колебаний к тому же характерно особенно значимое усиление при развитом волнении по сравнению со спокойной погодой, хотя 16 и 26 ноября данные пики также хорошо выражены. Отметим, что в работе [Ивельская и др., 2001] колебания с периодом около 3 мин отмечались как в спокойную погоду, так и при прохождении циклона.

Спектр колебаний уровня моря для штормовой ситуации 23 ноября существенно отличается от других. В этот день наблюдалось сильное волнение с высотой волн, превышающих 3.5 м, что регистрировалось нами за несколько лет достаточно редко. Основные пики в спектре колебаний уровня моря в это время были выражены значительно слабее, чем при общем подъеме уровня энергии в широком диапазоне периодов.

2.2. Модель динамической системы

Отмеченное явление существенного ослабления пиков в спектрах предположительно означает переход динамической системы – водной массы в бухте г Холмск, колеблющейся на резонансных периодах, возбуждаемых внешним воздействием – приходящей зыбью, к хаотическим колебаниям. В работе [Kovalev, Kovalev, 2019] была выполнена проверка этого предположения, основанная на диагностических тестах, предложенных Ф. Муноном [Мун, 1990]. Для выявления хаотических колебаний он рекомендует рассмотреть спектр колебаний, фазовый портрет и отображение Пуанкаре.

Как отмечалось выше, спектр колебаний уровня для 23.11.2006 (рис. 2.3) широкий и не содержит существенно выраженных периодических волновых процессов, т. е. может быть отнесен к спектру хаотического процесса. Также отметим, что рассматриваемая динамическая система нелинейна, поскольку в ней происходит преобразование энергии зыби с периодами 10–15 с в периоды более низкочастотных колебаний, что возможно только в нелинейных системах.

Для нахождения других диагностических тестов (фазовых портретов и отображений Пуанкаре) было проведено численное моделирования колебаний в Холмской бухте с использованием осциллятора Дуффинга – осциллятора с кубической нелинейностью, который является одной из наиболее распространенных моделей нелинейных колебаний. Особенностью осциллятора Дуффинга является возможность получения хаотической динамики [Kovacic, 2011]. Уравнение впервые было выведено немецким инженером Георгом Дуффингом в 1918 году и изучено теоретическим и экспериментальным путем многими другими учёными.

Рассматриваемая здесь нелинейная система в этом случае может быть представлена уравнением Дуффинга, которое описывает систему 2-го порядка с нерегулярными колебаниями и внешним периодическим воздействием [Hayashi, 1964; Kovacic, 2011]. Модель системы описывается следующим уравнением:

$$\ddot{x} + k\dot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^3 = F\cos\omega t\,, \qquad (2.1)$$

где F и ω – амплитуда и частота внешнего периодического воздействия (период Т); ω_0 – собственная частота осциллятора (период T_0); k –коэффициент затухания, а α – коэффициент нелинейности. Это уравнение описывает движение классической частицы в потенциале двойной ямы.

Обычно при численном моделировании уравнение (2.1) используют понижение порядка дифференциального уравнения в соответствии с теоремой Коши:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\omega_0^2 x - \alpha x^3 - kx_2 + F\cos\omega t\,. \end{aligned} \tag{2.2}$$

С использованием (2.2) проведено численное моделирование рассматриваемой системы – взаимодействие сейш в акватории порта Холмск с приходящими волнами зыби. Для обнаруженных в бухте периодов волн и разных периодов приходящих ветровых волн и зыби рассчитаны фазовые портреты и отображение Пуанкаре для различной амплитуды внешнего воздействия F и параметра затухания k. Они имеют схожий характер, а для периода собственных колебаний 3 мин и приходящей зыби 12 с приведены на рис. 2.4.

При моделировании выполнялось численное решение нелинейной системы дифференциальных уравнений с использованием разработанной нами программы PUAN [Ковалев, Иволгин, 2018] на языке Delphy, которая позволяет значительно ускорить процесс вычислений фазового портрета и отображения Пуанкаре для большого числа точек и вычисления бифуркационных диаграмм, которые помогают определить динамическое поведение вышеуказанной системы. Наконец, были получены различные типы колебаний – периодические, квазипериодические и хаотические.

Численное исследование показало, что рассматриваемая нелинейная система обладает сложной динамикой, включая такие явления, как квазипериодичность и хаос. В системе наблюдается перемежаемость хаотических и квазипериодических колебаний для широкого диапазона периодов внешнего воздействия от 5 до 15 с и для периодов собственных колебаний 3 и 8 мин. Их энергия при уменьшении коэффициента затухания возрастает (рис. 2.4в, г), а при увеличении затухания уменьшается (рис. 2.4д, е) для одного и того же периода сейш и приходящих волн. При значениях коэффициента затухания больших 0.2 энергия хаотических колебаний резко уменьшается, и в этом случае колебания в динамической системе, согласно [The Study ..., 2013], на основе отображения (рис. 2.4е) соответствуют многополосному хаосу.

Анализ зависимости энергии хаотических колебаний в системе от внешнего воздействия показал, что увеличение ее амплитуды F вызывает периодическое появление хаотических колебаний и изменение формы отображения Пуанкаре (рис. 2.4а, б, в, г). Данные отображения близки к отображениям, полученным Уэдой [Ueda, 1980]. При этом для одних и тех же значений амплитуды внешнего воздействия, соответствующего слабой энергии хаотических колебаний, уменьшение коэффициента затухания приводит к интенсификации хаоса, что вообще говоря, очевидно. То же происходит и при увеличении коэффициента нелинейности, при значительном уменьшении которого система переходит к периодическим колебаниям. Также с увеличением амплитуды внешнего воздействия наблюдается общий постоянный тренд, соответствующий увеличению энергии хаотических колебаний. Такой же вывод сделан и на основании исследований перехода к хаосу в нелинейной динамической системе, приведенных в работе [Young, 2015].

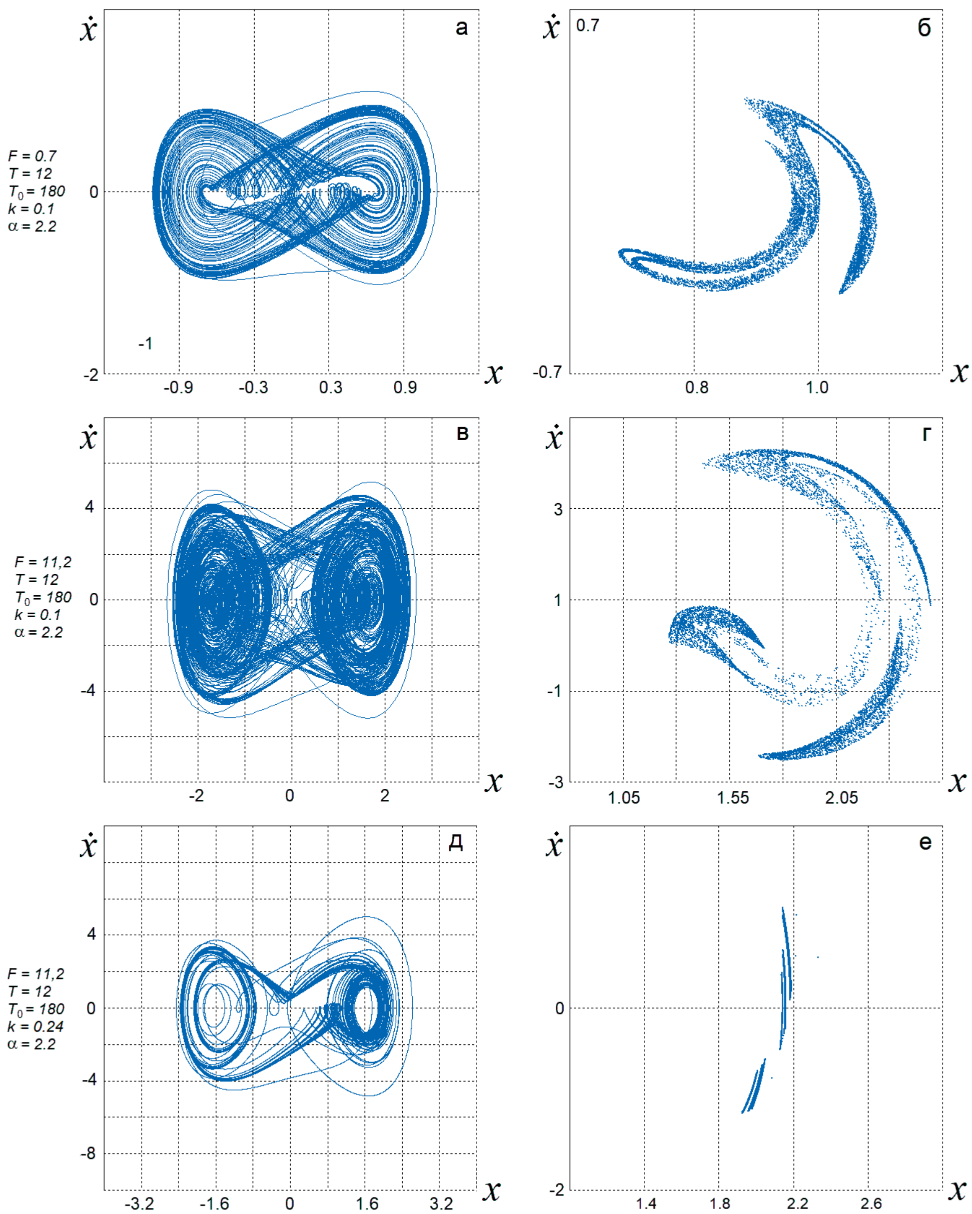


Рис. 2.4. Фазовые портреты (а, и, д) и отображения Пуанкаре (б, г, е) для различной амплитуды внешнего воздействия F и параметра затухания k для периодов внешнего воздействия 12 с и периодов собственных колебаний 3 мин.

Для разных величин параметров, входящих в систему (2.2), были рассчитаны бифуркационные диаграммы, одна из которых приведена (рис. 2.5). Поскольку характер диаграммы в целом не меняется, для более детального показа приведены начальный участок для F от 0 до 1.5 и для F от 17 до 20. Они подтвердили перемежаемость хаотических колебаний с периодическими при изменении амплитуды внешнего воздействия F.

На бифуркационной диаграмме хорошо видно, что при некоторых значениях параметра F переменная x принимает единственное значение, т. е. процесс во времени вообще не меняется. Затем рождается режим периода 2, когда происходит циклическое изменение переменной, принимающей по очереди два значения, например, для значений F около 0.5 x принимает значения 17.3, 18.2. Затем рождается режим периода 4, что хорошо видно на второй части диаграммы. Наблюдаемые бифуркации являются бифуркациями удвоениями периода, о которых рассказано в первой главе.

Как показано в первой главе, точки удвоений накапливаются к некоторой критической точке по закону геометрической прогрессии. Это закон нелинейного мира, универсальный характер которого был осознан и обоснован М. Фейгенбаумом [Feigenbaum, 1978]. За критической точкой возможен хаос, который на бифуркационном дереве выглядит как «размазанные» участки кроны. В этом случае динамическая переменная совершает нерегулярное движение, которое выглядит как шум, хотя и является «продуктом» простейшего итерационного уравнения.

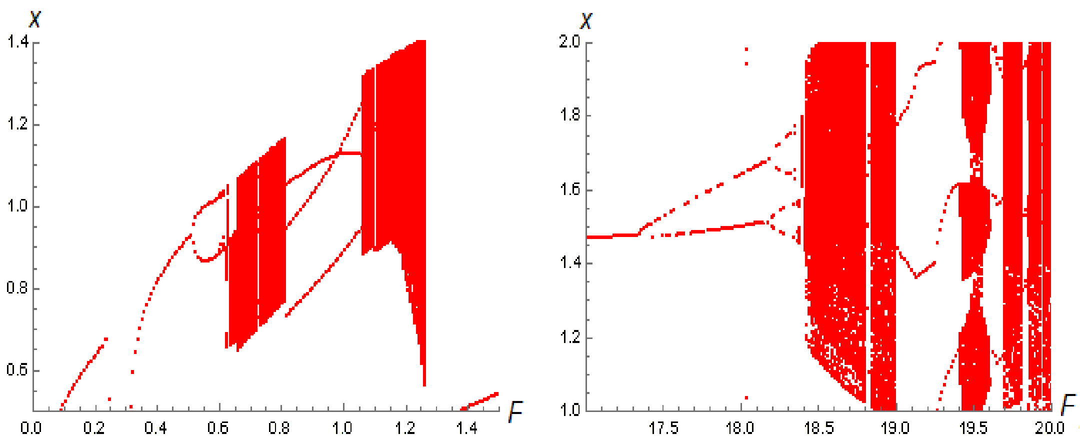


Рис. 2.5. Бифуркационные диаграммы зависимости x от амплитуды внешнего воздействия F для начального участка для F от 0 до 1.5 и для F от 17 до 20.

2.3. Выводы

Проведен анализ волнения в бухте г. Холмск (о. Сахалин) по данным наблюдений 2006 г. Рассчитанные по измеренным временным рядам энергетические спектры колебаний уровня моря для различных погодных условий показали наличие максимумов на периодах около 3 и 8 мин, которые соответствуют собственным резонансным колебаниям уровня моря – сейшам –

и значимо выделяются на фоне шума. Энергия этих колебаний возрастает с увеличением ветрового волнения и зыби, приходящих на вход бухты.

Для ветровых волн и зыби высотой более 3.5 м, приходящих на вход бухты, спектр имеет другой характер – энергия движений в бухте существенно возрастает в широком диапазоне периодов и достигает уровня энергии сейш, которые в этом случае практически не выделяются. Авторами было высказано предположение, что при больших амплитудах волн на входе бухты колебания в ней становятся хаотическими. Проверка этого предположения была сделана на основе численного моделирования с использованием уравнения Дуффинга с внешним периодическим воздействием.

Численное исследование колебаний в динамической системе – водной массы в бухте г. Холмск, возбуждаемой внешним воздействием – ветровыми волнами и зыбью, показало, что рассматриваемая нелинейная система обладает сложной динамикой, включая такие явления как периодичность, квазипериодичность и хаос. При этом в системе наблюдается перемежаемость хаотических и квазипериодических режимов колебаний с ростом амплитуды внешнего воздействия для широкого диапазона ее периодов – от 5 до 15 с и для периодов собственных колебаний 3 и 8 мин. Также, с увеличением амплитуды приходящих на вход бухты волн энергия хаотических колебаний в бухте растет. И при очень больших внешних амплитудах энергия хаотических колебаний сравнима с периодическими, проявляющимися в виде сейш.

Модельный анализ зависимости энергии хаотических колебаний в системе от амплитуды внешнего воздействия показал, что ее увеличение вызывает увеличение энергии хаотических колебаний в системе и изменение формы отображения Пуанкаре. При этом для значений амплитуды внешнего воздействия, соответствующих слабой энергии хаотических колебаний, уменьшение коэффициента затухания приводит к интенсификации хаоса. То же происходит и при увеличении коэффициента нелинейности, при значительном уменьшении которого система переходит к периодическим колебаниям. Увеличение амплитуды внешнего воздействия вызывает общий постоянный тренд, соответствующий увеличению энергии хаотических колебаний.

Рассчитанные в процессе численного моделирования бифуркационные диаграммы подтверждают перемежаемость хаотических, периодических и квазипериодических режимов колебаний системы. Диаграммы также показывают, что при некоторых значениях амплитуды внешнего воздействия динамика системы во времени не меняется, но при изменениях этого параметра происходит удвоение периода колебаний системы, после которого возможен хаос, проявляющийся на бифуркационном дереве в виде «размазанных» участков кроны.

Изучение поведения морских динамических систем с хаосом, каковой и является рассматриваемая акватория, необходимо для практических целей и учета тех последствий, к которым может привести возникновение сложной динамики. Можно задаться вопросом, как расположен и устроен бассейн притяжения второго аттрактора и как он зависит от интенсивности волнения. Попадание в бассейн притяжения второго аттрактора ведет к катастрофе.

ГЛАВА 3

Модуляция приливом собственных колебаний в бухте на примере сейш портов Углегорска и Бошняково

Известно, что даже в «хорошо защищенных» портах наблюдаются сильные возвратно-поступательные движения воды, которые приводят к удару судов о причал или друг о друга, обрыву швартовых и нарушению погрузо-разгрузочных операций [Рабинович, 1993; Лабзовский, 1971; Райхлен, 1970; Ветер …, 1986]. Это явление в отечественной литературе получило название тягуна, которое вызывают инфрагравитационные (ИГ) волны, когда их характерные периоды совпадают или близки к периодам собственных колебаний акватории порта – сейшам [Рабинович, 1993]. Поэтому изучение собственных колебаний бухт представляет интерес и для практических целей – обеспечения безопасности мореходства.

Было проведено изучение особенностей волнового режима в двух небольших портовых бухтах западного побережья о. Сахалин – Углегорск и Бошняково, используемых для погрузки угля. Несмотря на их размеры, порты играют определенную роль в экономике Сахалинской области. Карта южной части о. Сахалин с основными портами приведена на рис. 3.1.

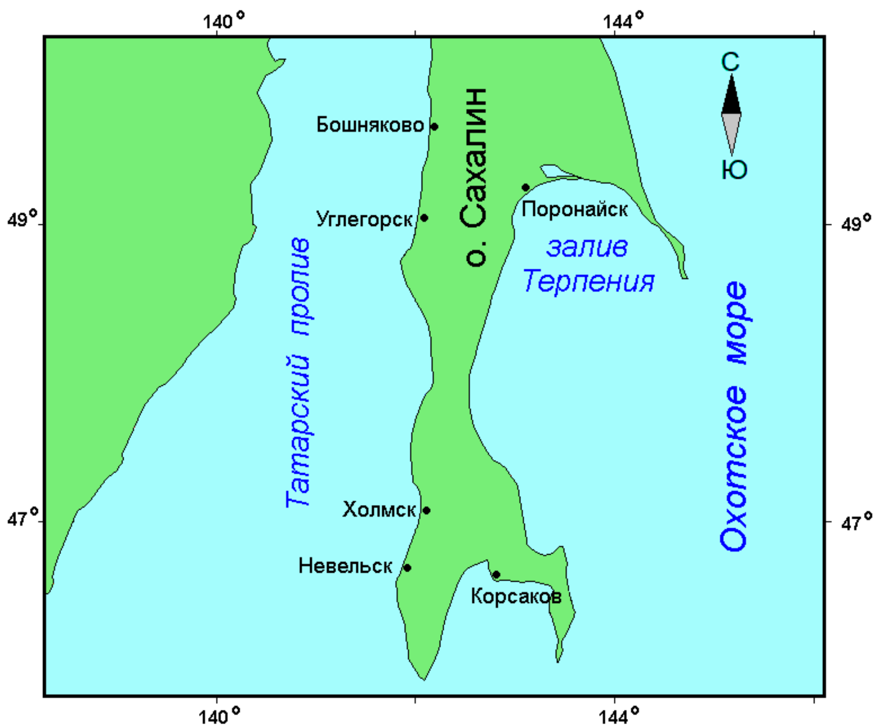


Рис. 3.1. Карта южной части о. Сахалин с основными портами.

При изучении волновых процессов в портовых бухтах или полузамкнутых акваториях был обнаружен интересный эффект – периодическое изменение периодов собственных колебаний акваторий – модуляция. Эта связь с приливом хорошо видна на всех текущих спектрах записей колебаний уровня моря, выполненных в полузамкнутых акваториях, например, в портах г. Углегорск и с. Бошняково (рис. 3.2).

Следует отметить, что эффект модуляции наблюдается даже в совершенно открытых акваториях, таких как Южно-Курильская бухта или Курильский залив, но с выраженными резонансными свойствами, благодаря чему в них также возбуждаются сейшевые колебания.

Ранее нами было проведено изучение эффекта модуляции ИГ волн приливом, которое показало, что основная причина модуляции – увеличение потерь энергии по отливу в прибрежной зоне на донном профиле [Ковалев, Ковалев, 2018]. При этом ИГ энергия передается движениям более высокой частоты в прибрежной зоне через близкое к резонансу нелинейное взаимодействие между триадами волновых компонент (т. е. реверсный механизма генерации ИГ волн). Эта нелинейная передача чувствительна к донному профилю прибрежной зоны, и таким образом приливные колебания уровня моря по неоднородному пляжу вызывают приливные изменения ИГ энергии. Данное исследование в некоторой степени подтверждается выводом, сделанным в работе [Tidal modulation ..., 2006].

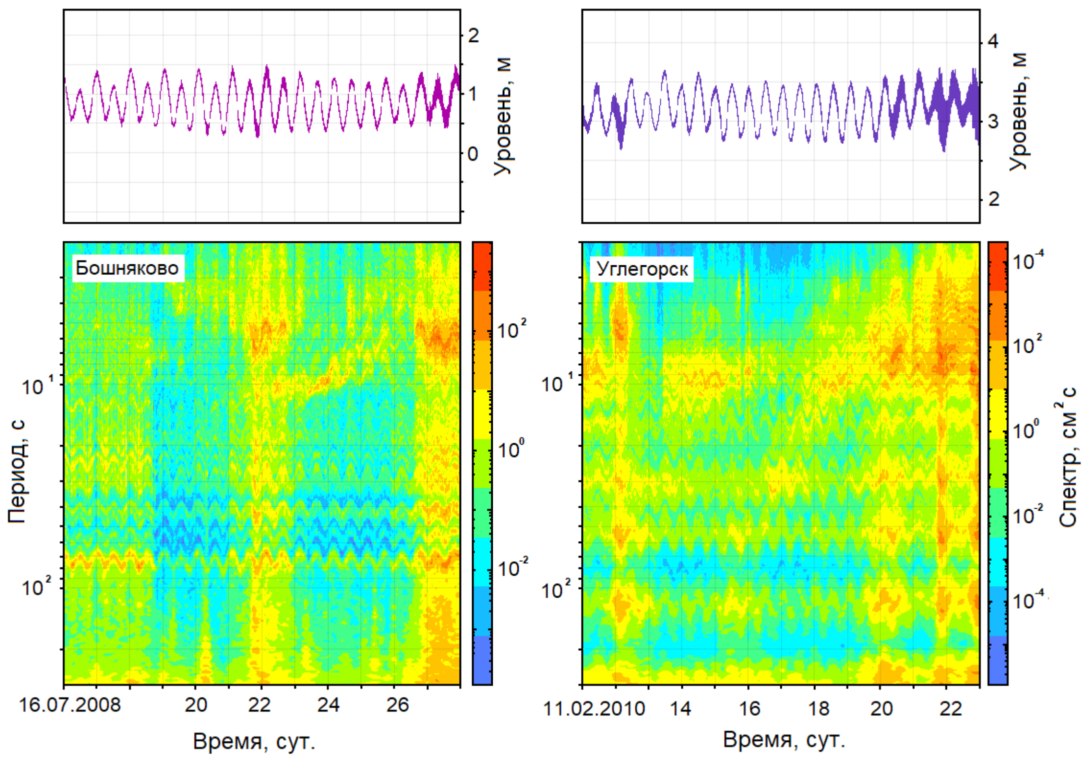


Рис. 3.2. Текущие спектры колебаний уровня моря в акватории порта г. Углегорск и с. Бошняково.

В то же время, полученные нами данные по колебаниям уровня моря в портовых бухтах показали ярко выраженную модуляцию сейш с приливным периодом. При этом изменение периода может достигать 20 %, в то время как при модуляции ИГ волн эта величина не превышает 15 %. К тому же, приливные течения проявляются только на входе и поэтому не будут оказывать модулирующего воздействия на сейши.

Исходя из изложенного было решено провести изучение механизма (причины) модуляции в портовых бухтах коротких волн приливно-отливными явлениями на примере бухт г. Углегорск и с. Бошняково, карты акваторий которых приведены на рис. 3.3.

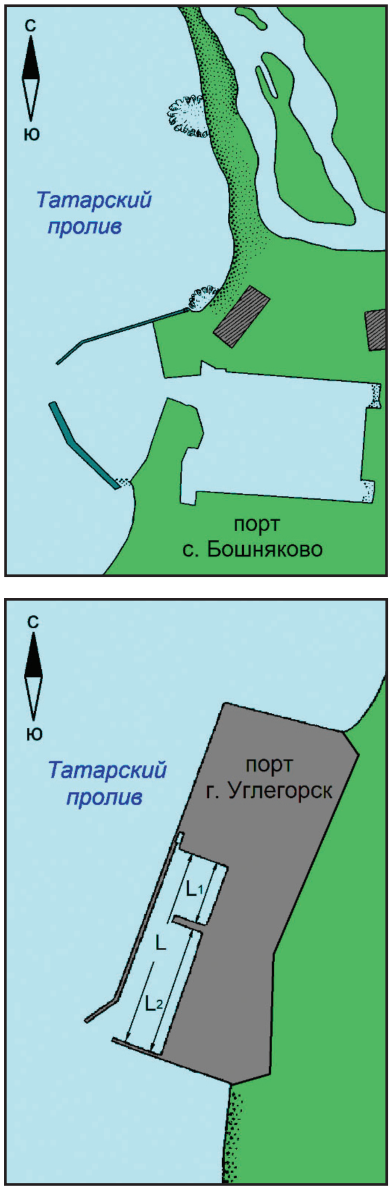


Рис. 3.3. Акватории порта Бошняково размерами 190 на 120 м, глубиной 2.2 м и порта Углегорск: L = 264 м, L_1 = 80 м, L_2= 184 м, ширина 72 м, глубина у причала от 1.9 до 2.2 м.

3.1. Данные натурного эксперимента

В 2010 году при проведении натурных экспериментов были установлены автоматические регистраторы волнения (АРВ) в портовых бухтах западного побережья острова Сахалин. В порту г. Углегорск был установлен АРВ в северном ковше портовой гавани у причальной стенки. В результате наблюдений была получена запись колебаний уровня моря с секундной дискретностью с декабря 2009 по июнь 2010 г., фрагмент которой приведен на рис. 3.2. Также привлекались данные наблюдений колебаний уровня моря, полученные в 2008 г. в порту с. Бошняково. Они имеют схожий характер, хорошо видно наличие модуляции. Однако порт с. Бошняково имеет только один объем.

Акватория порта г. Углегорск имеет прямоугольную форму и разделена на неравные части пирсом. В таких замкнутых акваториях с одним открытым входом образуются системы собственных колебаний уровня моря. Период сейш зависит от геометрической формы и размеров бассейна, и для бухт с высокой добротностью сейши могут представлять серьезную опасность. Согласно работе [Рабинович 1993], потеря энергии сейш в замкнутых бассейнах в основном связана с диссипацией энергии обрушения и трения, в то время как затухание сейшевых колебаний в порту происходит в основном благодаря излучению волновой энергии через устье гавани.

Для упрощения задачи расчета собственных колебаний остановимся только на некоторых аспектах, которые имеют непосредственное отношение к колебаниям в заливах, бухтах, гаванях, т. е. к акваториям с открытой границей (входом), через которую осуществляется их связь с внешним бассейном.

Определение собственных резонансных частот полуоткрытых прямоугольных бассейнов длины L и однородной глубины H может быть произведено по формуле Мериана [Райхлен, 1970; Рабинович, 1993]:

$$T_n = \frac{2L}{n\sqrt{gH}} \text{ для моды } n = 1, 2, 3, \ldots . \tag{3.1}$$

При этом, поскольку имеется возможность возбуждения сейш в каждом сегменте порта, расчет сейш производился для каждой части и для общего объема. Полученные результаты приведены в табл. 3.1. Там же, для сравнения, приведены периоды сейш, определенные по спектрам натурных данных. Следует отметить, что расчет проводился и по выражению для вычисления периода собственных колебаний жидкости в прямоугольном бассейне, полученному в работах [Манилюк, Черкесов, 2016], который показал близкие к вычислениям по формуле (3.1) результаты.

Таблица 3.1

Рассчитанные для первой моды и наблюденные периоды сейш

Порт	L, м	H, м (средняя)	D H, м	Расчет		По спектрам		Примечание
				T, с прилив	T, с отлив	T, с прилив	T, с отлив	
Углегорск	80	2.05	0.45	32.3	35.7			продольная
Углегорск	184	2.05	0.9	68.4	82.1	51.1	55.9	продольная
Углегорск	264	2.05	0.41	107.5	117.8	116.4	130.9	продольная
Углегорск	72	2.05	0.55	28.5	32.1	29.1	31.7	поперечная
Бошняково	190	2.2	0.65	71.9	81.8	70	79	продольная
Бошняково	120	2.2	0.4	47.4	51.7	41.2	43.9	поперечная

Анализ таблицы показывает, что рассчитанные и наблюденные периоды сейш близки, за исключением периодов сегмента порта, примыкающего ко входу, и это обстоятельство, по-видимому, влияет на расчет. Остальные отличаются не более, чем на 10 %, что для рассчитанных периодов является хорошим результатом. Можно считать, что обнаруженные по измерениям максимумы на периодах колебаний соответствуют первой моде сейш. Рассчитанные периоды поперечной сейши для порта Углегорск лучше согласуются с наблюденными периодами короткой сейши и, по-видимому, пик в спектрах соответствует этой поперечной сейше. Здесь есть проблема в сложности идентификации обнаруженного в спектрах пика около 30 с, который можно также отнести и к периоду продольной сейши дальней от входа части порта.

3.2. Модель динамической системы двумя внешними воздействиями

Рассматриваемая динамическая система – колеблющаяся в портовом ковше жидкость – является нелинейной, поскольку изменение уровня, а значит и объема воды в ней в течение суток происходит по нелинейному закону при наличии внешнего воздействия – приливной волны. Выше приведено определение периодов колебаний для крайних положений уровней моря в порту – прилива и отлива. Представляет интерес рассмотреть поведение системы в целом, выполнив численное моделирование.

При этом будем учитывать, что кроме воздействия приливных волн на сейши в системе существует второе внешнее воздействие – зыбь (или ветровое волнение), которые также будет влиять на колебания уровня в системе. Отличие этой ситуации от внешнего воздействия с приливным периодом заключается в том, что периоды зыби близки к периодам обнаруженных сейш.

Обычно предполагается, что если на осциллятор действует внешняя сила, частота которой много меньше собственной частоты осциллятора, то это воздействие можно рассматривать как квазистационарное. Аналогичная ситуация возникает при изучении взаимодействия двух осцилляторов, собственная частота одного из которых много меньше собственной частоты другого, когда этим взаимодействием обычно пренебрегалось [Ваврив, Шигимага, 2000]. Однако выполненные в 90-х годах исследования доказывают, что при определенных условиях взаимодействие низко- и высокочастотных колебаний может быть существенным и приводит к возникновению хаотических колебаний [Nayfeh, Balachandran, 1995; Shygimaga et al., 1998]. Следует отметить, что исследовались и динамические системы с двумя близкими по частоте воздействиями, как например [The Study ..., 2013], результаты которых представляли интерес при анализе рассматриваемой здесь системы.

Колебания в нелинейной системе могут быть описаны одним обыкновенным дифференциальным уравнением Дуффинга, которое представляет систему 2-го порядка с нерегулярными колебаниями и внешним периодическим воздействием [Kovacic, 2011; Мун, 1990]. В настоящей работе для численного моделирования будем использовать уравнение Дуффинга, описывающего колебания в системе с двумя внешними воздействиями – волнами зыби и приливными. Уравнение для этого случая имеет вид [Ваврив, Шигимага, 2000]:

$$\ddot{x} + kx + \omega_0^2 x - \beta x^2 + \propto x^3 = F_{м} cos\Omega t + F cos\omega t \ , \qquad (3.2)$$

где $F_{м}$, W и F, ω – амплитуды и частоты внешнего длиннопериодного приливного воздействия (период $T_{м}$) и короткопериодного воздействия (период T), в данном случае волн зыби; ω_0 – собственная частота осциллятора (период T_0); k – коэффициент затухания; β и α – коэффициенты нелинейности.

С использованием уравнения (3.2) и разработанной нами программы PUAN [Ковалев, Иволгин, 2018] для порта г. Углегорск рассчитаны фазовые портреты и форма колебаний в системе для T = 12 с, $T_{м}$ = 24 часа, T_0 = 130.9 с, k = 0.01, α = 2, β = 2, при изменении амплитуды внешних воздействий – приливной волны и зыби.

Как видно из рис. 3.4, при отсутствии зыби F = 0 фазовый портрет системы и форма колебаний соответствует слабой диссипации элемента фазового пространства при траектории спирали в устойчивую неподвижную точку (рис. 3.4а, б).

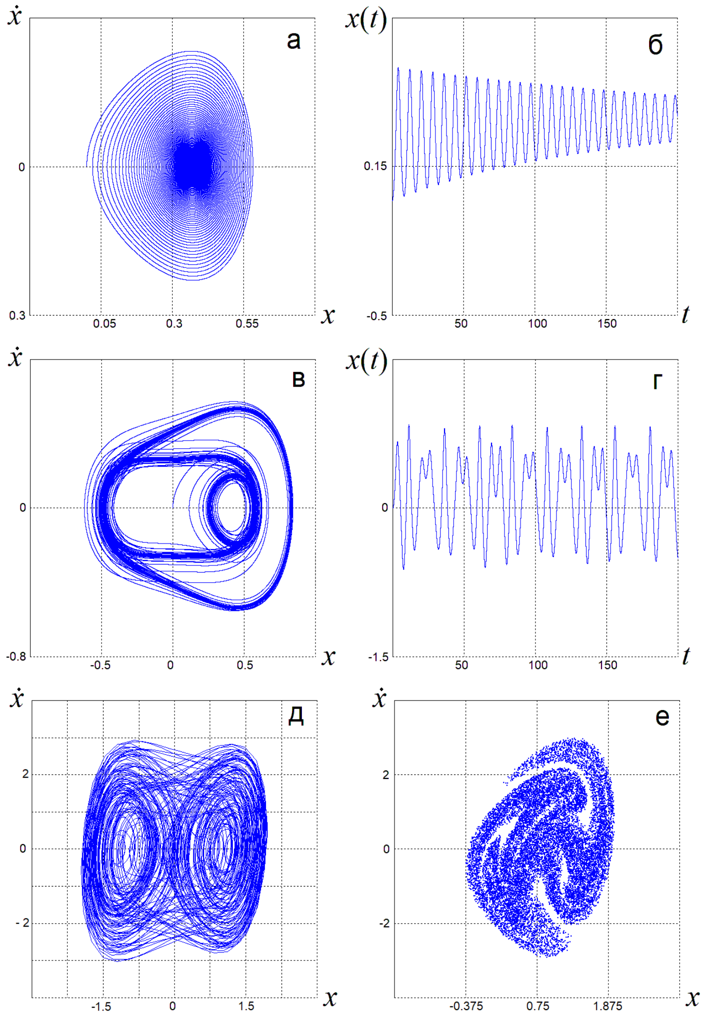


Рис. 3.4. Фазовые портреты, форма колебаний в системе и отображение Пуанкаре для $T = 12$ с, $T_м = 24$ часа, $T_0 = 130.9$ с, $k = 0.01$, $\alpha = 2$, $\beta = 2$, при изменении амплитуды внешних воздействий – приливного и зыби: а, б – $F_м = 0.1$, $F = 0$; в, г – $F_м = 0.1$, $F = 0.1$; д – $F_м = 0.1$, $F = 3.5$; е – отображение Пуанкаре для $F_м = 0.1$, $F = 3.5$.

Моделирование также показало, что в этом случае при увеличении коэффициента затухания от k = от 0.01 до 0.1 начальная амплитуда колебаний системы уменьшается незначительно, но колебания затухают в течение 15 периодов, и уменьшается число витков спирали фазового портрета. Увеличение амплитуды внешнего воздействия существенно не изменяет характера фазового портрета системы, а лишь добавляет число витков спирали. Переход на более короткие периоды осцилляций системы, соответствующих периодам сейш других частей акватории, ведет к уменьшению числа спиралей, также не изменяя характера фазового портрета.

Увеличение амплитуды зыби ведет к изменению формы колебаний и переходу их к квазипериодическому режиму. При равенстве амплитуд приливного воздействия и зыби наблюдается режим, когда в течение одного периода движение осуществляется по короткой орбите, а в течение следующего по другой, более длинной (рис. 3.4в) а форма колебаний при этом соответствует квазипериодическим (рис. 3.4г). При этом затухания колебаний не заметно, что говорит о перекачке энергии волн зыби сейшам.

Дальнейшее увеличение амплитуды зыби приводит к фазовому портрету системы, который называется странным хаотическим аттрактором (рис. 3.4д), отвечающим вынужденным колебаниям осциллятора Дуффинга для внешнего воздействия приливной волны, зыби с периодом 12 с и периодом осцилляций системы 130.9 с (рис. 3.4д, е).

Также для случая воздействия на систему волн зыби и приливной волны были рассчитаны бифуркационные диаграммы, приведенные на рис. 3.5, для параметров коэффициентов затухания 0.01 и нелинейности 2. При расчете диаграммы рис. 3.5а амплитуда $F_м = 0.5$, а для рис. 3.5б – $F_м = 0$, т. е. на систему воздействовала только одна волна с периодом зыби. Видно, что наличие второго воздействия с приливным периодом существенно изменяет моменты наступления хаотических колебаний в зависимости от амплитуды волн зыби. Это как раз и указывает на необходимость учета обоих воздействий, даже с сильно отличающимися частотами, при исследовании таких динамических систем. Детальный анализ рассчитанной бифуркационной диаграммы для двух внешних воздействий (рис. 3.5а) показал при каких значениях $F_м$ и F в системе наблюдается хаос. Для этого случая построен фазовый портрет системы и отображение Пуанкаре, приведенные на рис. 3.4д, е, которые подтвердили наличие хаотических колебаний в системе. Также было установлено, что при изменении F наблюдаются бифуркации удвоения, после которых следуют хаотические колебания. В то же время, возникновение хаотических колебаний часто наблюдается и без предварительной бифуркации удвоения.

Расчет бифуркационных диаграмм показал, что увеличение коэффициента нелинейности α ведет к увеличению областей с хаотическими колебаниями (рис. 3.6а), а увеличение коэффициента затухания k к уменьшению сложности системы (рис. 3.6б). Дальнейшее увеличение коэффициента затухания до $k = 0.3$ приводит к переходу системы к периодическим колебаниям.

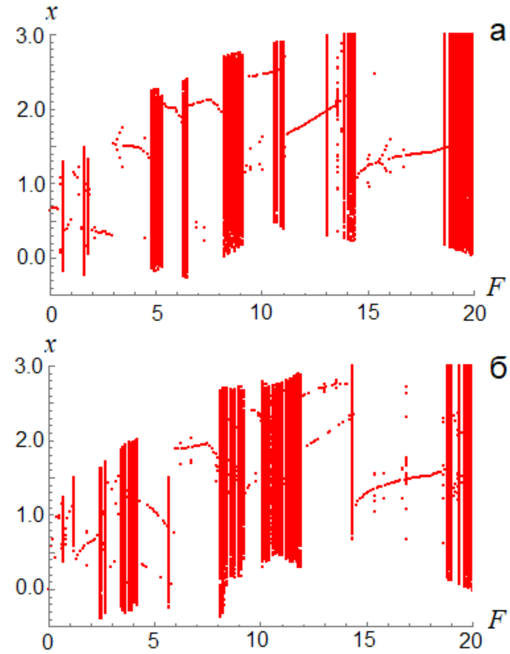


Рис. 3.5. Бифуркационные диаграммы зависимости x от F для коэффициентов затухания $\alpha = 0.01$, нелинейности $k = 2$ и для случаев: а – $F_м = 0.5$, б – $F_м = 0$.

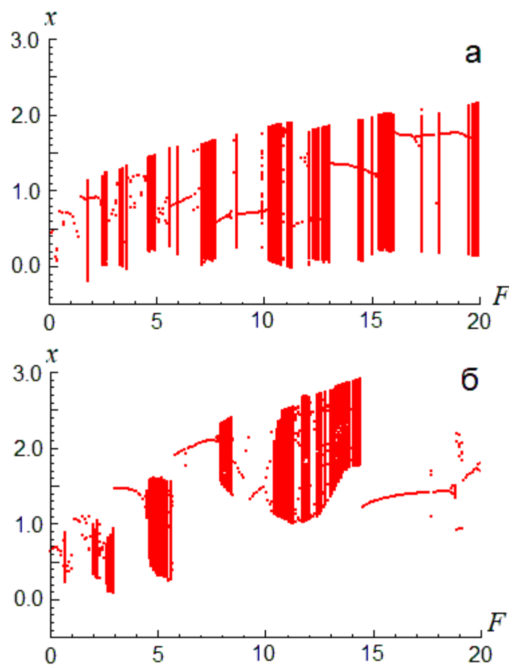


Рис. 3.6. Бифуркационные диаграммы зависимости x от F для $F_м = 0.5$ и коэффициента нелинейности a = 7 (а) и затухания $k = 0.1$.

3.3. Выводы

Проведен анализ волнения в портовых бухтах с. Бошняково и г. Углегорск. Показано, что в бухтах наблюдаются сейши, причем в порту г. Углегорск сейши на трех разных периодах в диапазоне опасного морского явления тягун, который проявляется в виде возвратно-поступательных движений воды и может представлять опасность для судов и причалов.

Установлено, что сейши модулируются по частоте приливной волной. Причиной этой модуляции является нелинейное изменение уровня моря в портовых бухтах с приливной частотой. Расчет периодов сейш в прилив и отлив, выполненный с использованием формулы Мериана, показал хорошее согласование с натурными данными.

С использованием уравнения Дуффинга выполнено численное моделирование динамики колебаний в динамической системе – водной массы в акватории порта г. Углегорск. При этом учитывалось, что на динамическую систему действует два внешних воздействия – приливные волны и волны зыби, существенно отличающиеся по величине периодов.

Полученные фазовые портреты системы показали, что колебания в системе при воздействии приливов соответствуют слабой диссипации элемента фазового пространства при траектории спирали в устойчивую неподвижную точку. С увеличением коэффициента затухания происходит уменьшение числа витков спирали фазового портрета. Переход на более короткие периоды осцилляций системы, соответствующих периодам сейш других частей акватории, ведет к уменьшению числа витков спирали, не изменяя характера фазового портрета.

Численное моделирование для воздействия короткопериодных волн зыби показало сложность динамики рассматриваемой нелинейной системы, включающей периодичность, квазипериодичность и хаос. Перемежаемость хаотических и квазипериодических колебаний наблюдается в широком диапазоне периодов внешнего короткопериодного воздействия, и с увеличением ее амплитуды длительность участков хаоса и квазипериодичности сокращается. Увеличение диссипации короткопериодных колебаний в системе, т. е. увеличении коэффициента затухания в системе приводит к периодическим колебаниям.

Наличие в системе второго воздействия с приливным периодом существенно изменяет моменты наступления хаотических колебаний в зависимости от амплитуды волн зыби. Это как раз и указывает на необходимость учета обоих воздействий, даже с сильно отличающимися частотами, при исследовании таких динамических систем

Результаты исследований хаотических движений помогают разобраться с переходом от упорядоченного движения к турбулентному [Мун, 1990]. Для гидрофизических процессов это тоже представляет интерес, особенно для масштабов, сравнимых с размерами ветрового волнения, поскольку такая турбулентность может оказывать существенное влияние на мореходность судов.

ГЛАВА 4

Возбуждение собственных колебаний подо льдом

Наблюдения за проникновением океанских волн под морской лед, проведенные нами и зарубежными исследователями, показали, что короткие морские ветровые волны очень быстро ослабляются и в пределах нескольких сотен метров от края льда (припая) их энергия в значительной степени уменьшается [Dean, 1966]. Однако зыбь обнаруживается и в сотнях километров подо льдом [Robin, 1963; Of ocean waves ..., 1995] и достигает мелководных районов побережья.

На мелководье наблюдаются эффекты нелинейности при трансформации волн. Нелинейности могут быть локально слабыми, но может иметь место значительный кросс-спектральный перенос энергии, если мелководная область шире по сравнению с расстоянием нелинейного взаимодействия [Guza, Thornton, 1980]. Известно, что нелинейные уравнения Кортевега-де Фриза для волн конечной амплитуды на мелководье над плоским дном показывают значительную передачу межспектральных энергий из-за почти резонансных квадратичных взаимодействий [Mei, Ünlüata, 1972].

Существует достаточно большое количество исследований свободных колебаний жидкости в ограниченном бассейне (сейш), как, например, отраженных в работах [Манилюк, Черкесов, 2016; Raichlen, 1966; Rabinovich, 2009; Sorensen, Thompson, 2002; Wilson, 1972]. Тем не менее, проведенные исследования [Зырянов, 2011] показали, что периоды сейш подо льдом отличаются и могут быть как больше, так и меньше периодов сейш открытой воды.

Результаты наших наблюдений, выполненные под припаем – ледовой зоной Охотского моря вблизи с. Охотское, о. Сахалин, показали, что прошедшая под лед зыбь может в зависимости от рельефа и наличия стенок передавать энергию коротким сейшам с образованием модовой структуры. Была выявлена интересная ситуация, когда в энергетическом спектре колебаний уровня в диапазоне периодов 2–15 секунд наблюдается несколько энергетических пиков.

Кажется очевидным, что лед сам не может генерировать сейши (за исключением случая айсбергов или лавин, которые генерируют волны, похожие на цунами). Однако ледяной покров может значительно повлиять на движения сейш, подавить их и препятствовать их генерации. В работе [Of ocean waves ..., 1995] приведены критические амплитуды морских волн различных периодов, которые показывают, что для волнения с периодами 5–10 с критической является амплитуда всего в 9 см, для зыби с периодом около 15 с – 28 см. Поэтому сейши большой амплитуды могут эффективно разрушить ледяной покров и способствовать созданию полыньи [Rabinovich, 2009] и тем самым представлять опасность для работающего на льду персонала. Данное обстоятельство и объясняет интерес к изучению сейш подо льдом.

4.1. Данные наблюдений

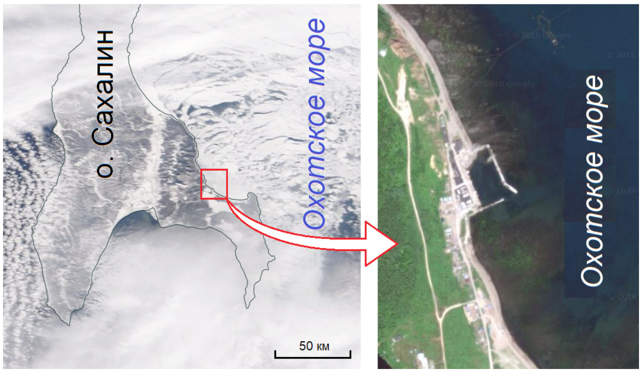


Рис. 4.1. Карта района проведения измерений колебаний уровня моря (на 6 февраля 2010 г. по данным сайта: worldview.earthdata.nasa.gov) и ковш, в котором установлен измеритель волнения.

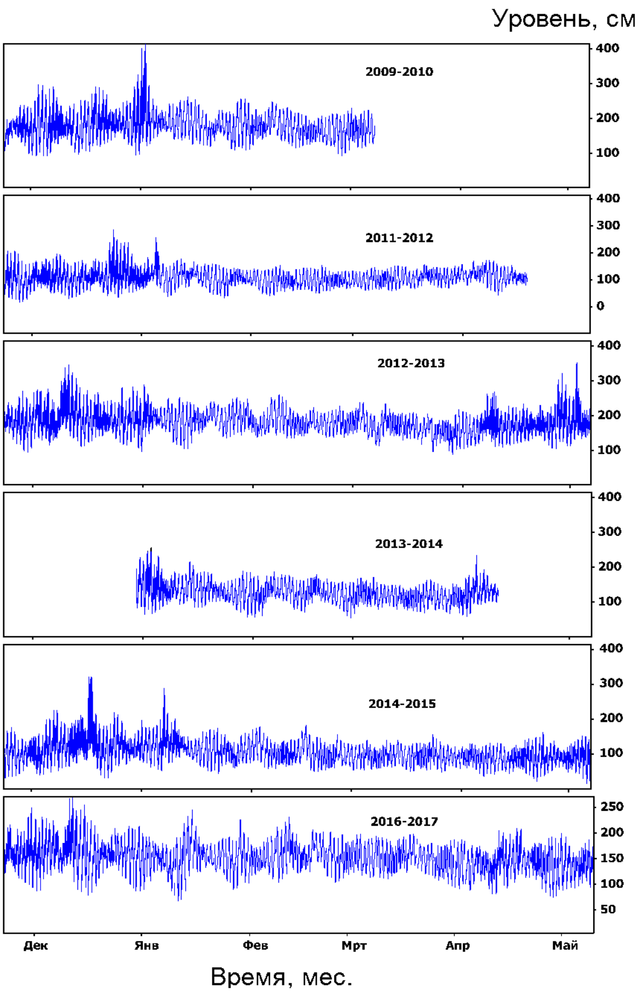


Рис. 4.2. Временные ряды для разных лет наблюдений за волнением.

ИМГиГ ДВО РАН проводит изучение волнения в прибрежной зоне вблизи с. Охотское (юго-восточное побережье о. Сахалин) начиная с 2009 г. по настоящее время с использованием автономных регистраторов волнения АРВ с записью данных с секундной дискретностью. На рис. 4.1 представлен район проведения круглогодичных наблюдений за волнением.

За время регистрации колебаний уровня моря получены качественные ряды наблюдений волнения в зимний период, в том числе и в море, покрытом льдом. Проводились круглогодичные записи и были получены временные ряды наблюдений, начиная с осени 2009 по весну 2017 года, за исключением зимнего периода 2010–2011 годов, которые приведены на рис. 4.2.

По отсутствию в записях «шума» – значительного ветрового волнения и зыби, хорошо видны периоды времени, когда море покрыто льдом. Обычно этот период продолжается с февраля по апрель, когда лед в виде припая держится у восточного побережья о. Сахалин. В дальнейшем был проведен спектральный и спектрально-временной анализ полученных рядов и оценена энергия колебаний в зависимости от периода волн. Полученные результаты использованы в данной монографии для сравнения с модельными расчетами.

4.2. Спектральный анализ данных наблюдений

Спектральный анализ позволил выявить периодические подъемы энергии колебаний уровня в диапазоне периодов от 2 до 15 с (рис. 4.3). Отметим, что энергетические пики по величине значительно превышают доверительный интервал и длинным периодам соответствует диапазон зыби, а также то обстоятельство, что пики не располагаются на кратных периодах и, значит, не могут быть просто гармониками основного периода. Похожая картина наблюдалась и в работе [Guza, Thornton, 1980], где проводились измерения давления и скорости на близких расстояниях в линию, простирающуюся от 10-метровой глубины до внутренней зоны прибоя в Торри-Пайнс-Бич, Сан-Диего, Калифорния.

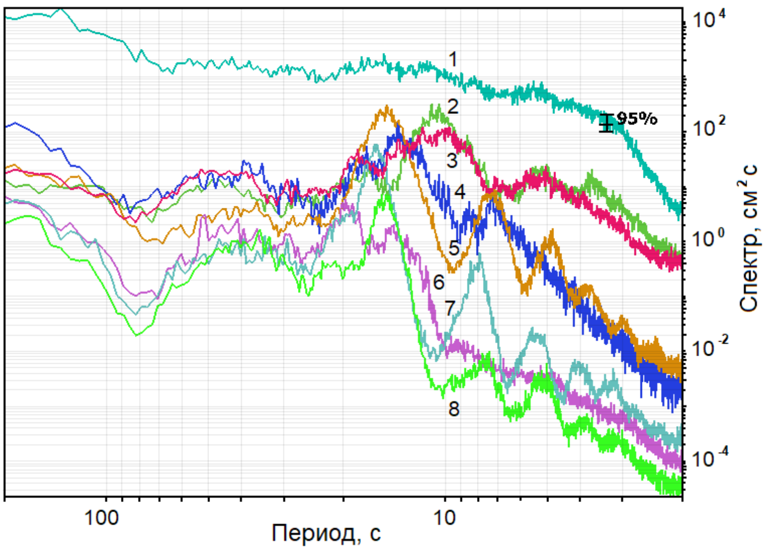


Рис. 4.3. Спектры колебаний уровня, вычисленные по суточным отрезкам для 2009–2010 г. 1–15 ноября, шторм; 2–16 декабря; 3–22 ноября; 4–9 января; 5–30 января; 6–9 февраля; 7–10 февраля; 8–12 февраля.

Дальнейший анализ рядов наблюдений за разные годы показал, что такой спектр характерен только для моря, покрытого льдом. В отсутствии льда, как, например, показано на рис. 4.3, спектры 1–3 рассчитанны для рядов наблюдений в ноябре-декабре, когда припай еще не образовался. Такие спектры иногда содержат два слабых пика, соответствующих короткопериодным колебаниям, кроме пика зыби, как, например, спектр 2 на рис. 4.3. Возможно, что эти пики отвечают ветровому волнению, которое достигает измерителя при больших трещинах в припае.

Наблюдаемые в портовом ковше, покрытом льдом, энергетические пики, соответствующие колебаниям уровня в диапазоне периодов от 2 до 15 с, проявляются только для ситуаций, когда на море зыбь большой амплитуды. Об этом можно судить по текущим спектрам (рис. 4.4, спектры 5, 7, 8), где выделяется мощный пик в диапазоне периодов зыби.

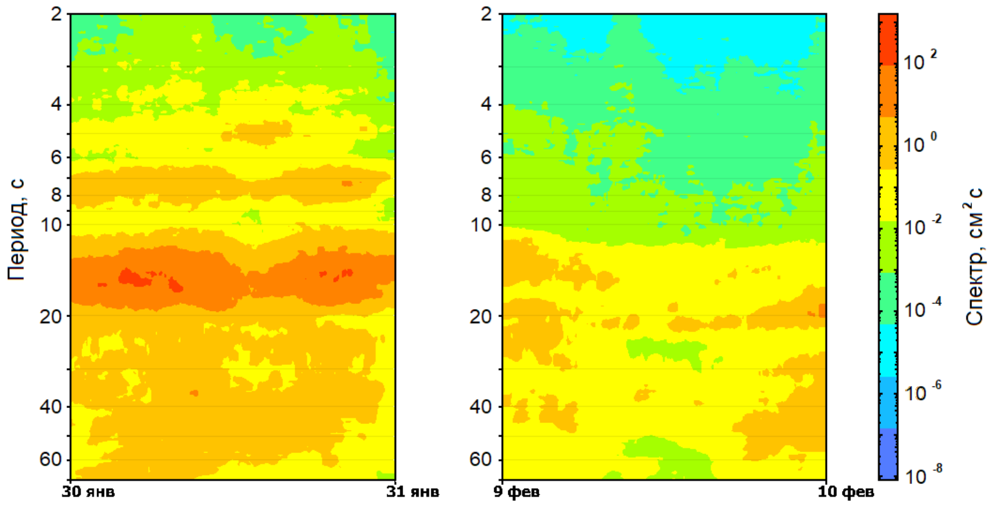


Рис. 4.4. Текущие спектры колебаний уровня моря для 30 января и 9 февраля 2010 г.

Для примера приведены ситуации для 30 января 2010 года, когда наблюдается подъем энергии зыби на два порядка и хорошо виден подъем на более коротких периодах, и 9 февраля 2010 г., когда энергия зыби невысока и отсутствуют другие короткопериодные колебания.

4.3. Генерация сейш

Нами было сделано предположение, что при приходе волн зыби с большой энергией к месту установки датчиков в ковше с. Охотское в результате нелинейной трансформации в нем происходит возбуждение сейш нескольких мод, более коротких, чем зыбь. Для определения периодов собственных колебаний был использован математический аппарат, приведенный в работе [Зырянов, 2011], описывающий сейши подо льдом. Для расчета периодов мод воспользуемся выражением для сейш под припайным льдом:

$$T_n = \frac{2(L - 2\sqrt{\tilde{T}/g\rho_w})}{n\sqrt{gH_{red}(\omega_n)}} \ , \qquad (4.1)$$

где n = 1,2,3… – мода колебаний, L – длина бассейна, ρ_w плотность морской воды составляет приблизительно 1025 кг м$^{-2}$, ω_n – круговая частота волны подо льдом, n моды, $\tilde{T} = \tilde{k}h$ – коэффициент пропорциональности, зависящий от физических свойств льда, и $\tilde{k}$ = 10^6 н/м^2 – коэффициент сжатия (растяжения) льда [Зырянов, 2011]. В выражении (4.1) также использована приведенная или редуцированная глубина водоема:

$$H_{\mathrm{red}} = H\,[1\text{-}F(\alpha H)] \ , \qquad (4.2)$$

где H – глубина водоема, $F(\alpha H)$ – функция, зависящая от глубины водоема и параметра $\alpha = \sqrt{\omega / 2A}$, в свою очередь зависящего от частоты волны. Здесь A – коэффициент вертикального турбулентного обмена (константа) A = 10^{-2} м^2/с.

С использованием выражений (4.1, 4.2) выполнен расчет периодов продольных сейш в портовом ковше с. Охотское для различной глубины, которая меняется с приливом, и толщины припайного льда. Полученные результаты, а также данные наблюдений сведены в таблицу 4.1.

Таблица 4.1

Результаты расчета периодов собственных колебаний ковша с. Охотское по выражениям (4.1, 4.2) и по данным наблюдений для разной глубины бассейна и толщины льда

Мода	Расчетные периоды мод для разной глубины и толщины льда				Измеренные периоды (с)
	Глубина 1 м, толщина льда 1.5 м	Глубина 1.5 м, толщина льда 1.5 м	Глубина 2 м, толщина льда 1.5 м	Глубина 2 м, толщина льда 2 м	
1	86.1	70.3	60.9	58.9	
2	43.1	35.2	30.4	29.5	
3	28.7	23.4	20.3	19.7	
4	21.5	17.6	15.2	14.7	15.34
5	17.2	14.1	12.2	11.8	
6	14.4	11.7	10.2	9.83	
7	12.3	10.1	8.70	8.43	
8	10.8	8.80	7.61	7.37	7.3
9	9.57	7.81	6.77	6.55	
10	8.61	7.03	6.09	5.90	
11	7.83	6.39	5.54	5.36	
12	7.18	5.86	5.07	4.92	4.82
13	6.62	5.41	4.68	4.54	
14	6.15	5.02	4.35	4.21	
15	5.74	4.69	4.06	3.93	
16	5.38	4.39	3.81	3.69	3.74
17	5.07	4.14	3.58	3.47	
18	4.78	3.91	3.38	3.28	
19	4.53	3.70	3.21	3.10	2.96
20	4.31	3.52	3.04	2.95	2.38

Проведем анализ полученных результатов. Предварительно отметим, что поскольку нам не известно, какой моде соответствовали периоды измеренных сейш, они расположены в ячейках, находящихся рядом с ячейками близких по величине расчетных периодов. При этом видно, что измеренные периоды наиболее близки к расчетным для глубины 2 метра и толщины льда 2 метра. Близкие к этой величине значения толщины льда обычно регистрируется в портовом ковше в зимний период. Соответствие измеренных и расчетных данных подтверждает и рис. 4.5. На нем также отображены моды поперечной сейши ковша, но видно, что они существенно отличаются от измеренных (нижняя кривая 3 на рис. 4.5).

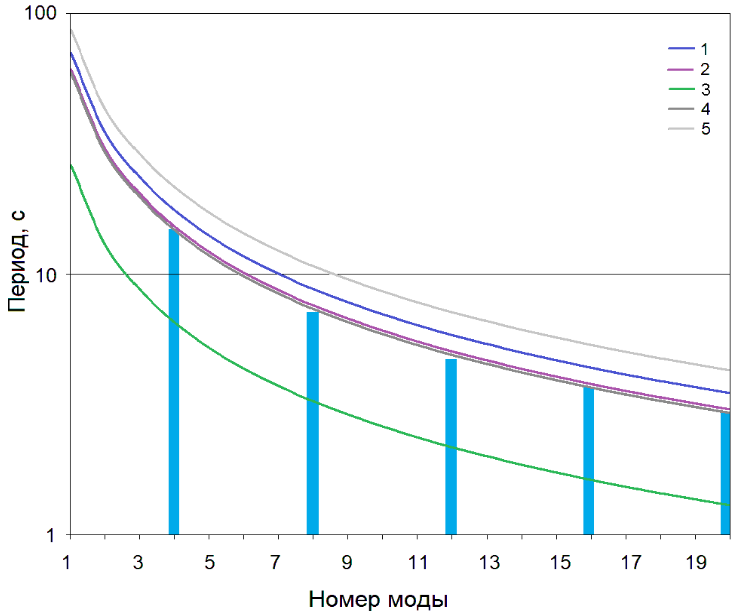


Рис. 4.5. Зависимость периода моды сейши от номера: 1 – глубина 1.5 м, толщина льда 1.5 м; 2 – глубина 2 м, толщина льда 1.5 м; 3 – поперечная сейша, глубина 2 м, толщина льда 2 м; 4 – глубина 2 м, толщина льда 2 м; 5 – глубина 1 м, толщина льда 1.5 м. Гистограммой показаны измеренные значения.

Возбуждаемые в портовом ковше сейши имеют период первой моды значительно короче – 15.34 с, чем получен с использованием модельного расчета – 60.9 с. Пик с периодом 15.34 с близок к периоду приходящей зыби, на что указывают результаты спектрального анализа волнения, выполненные для данных, полученных на не покрытом льдом море для той же точки наблюдения (рис. 4.3, кривая 2). Но вполне вероятно, что на периоде 15.34 с сейша также возбуждается, поскольку модельный расчет имеет моду колебаний на близком периоде.

Из рис. 4.5 также хорошо видно, что периоды мод больше зависят от глубины (кривые 1 и 2), чем от толщины льда (кривые 2 и 3).

4.4. Модель динамического хаоса

Известно, что в нелинейных динамических системах могут возникнуть хаотические колебания. На практике путь хаоса в системах, описываемых уравнениями с частными производными, очень сложен, как для аналитического, так и численного анализа. Здесь мы рассмотрим промежуточную ситуацию, когда динамика описывается одним обыкновенным дифференциальным уравнением Дуффинга. И рассматриваемая нелинейная динамическая система в этом случае может быть представлена уравнением Дуффинга, которое описывает систему 2-го порядка с нерегулярными колебаниями и внешним периодическим воздействием [Kovacic, 2011]. Уравнение модели динамической системы записывается, как и ранее использовали, в виде:

$$\ddot{x} + k\dot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^3 = F\cos\omega t\,, \tag{4.3}$$

где F и ω – амплитуда частота внешнего периодического воздействия (период T); ω_0 – собственная частота осциллятора (период T_0); k – затухание, а α – коэффициент нелинейности.

Уравнение Дуффинга (4.3) описывает колебательное движение классической частицы в потенциале двойной ямы. Существует похожее простое дифференциальное уравнение второго порядка, которое описывает возбуждение гармонических колебаний в одномерной колебательной системе с вязким трением в виде:

$$\ddot{x} + k\dot{x} + \omega_0^2 x = F\cos\omega t. \tag{4.4}$$

Здесь упругая сила, действующая на точку, линейно зависит от смещения:

$$F_u = -\gamma x\,, \tag{4.5}$$

где γ – коэффициент жесткости, или, как это следует из теории гармонических колебаний,

$$F_u = \omega_0^2 x\,.$$

Для перехода к нелинейной динамике характер этой зависимости должен быть нелинейным. В уравнении Дуффинга это достигается добавлением нового члена αx^3. Тогда сила упругости будет описываться уже таким выражением:

$$F_u = \omega_0^2 x - \alpha x^3\,, \tag{4.6}$$

а уравнение (4.4) приобретает вид (4.3).

Как нетрудно получить, потенциальная энергия $W_п$ упругих сил (4.6) в колебательной системе выражается следующим соотношением:

$$W_n = \omega_0^2 x^2/2 + \alpha x^4/4\,. \tag{4.7}$$

Построим график $-W_п$ при $\omega_0^2 = 1$, α = -1 (рис. 4.6). Характер зависимости потенциальной энергии от смещения позволяет сделать вывод о том, что начало координат ($x = 0$) для колебательной системы является точкой неустойчивого равновесия, а оставшиеся ($x = -1$, $x = 1$) – устойчивого равновесия.

Необходимо отметить, что характер колебаний в такой системе, которая описывается уравнением (4.3), и одна из возможных физических реализаций может оказаться гораздо более сложным, чем по уравнению (4.4).

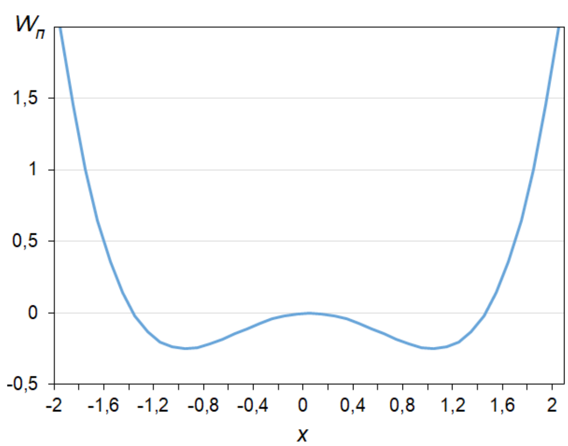


Рис. 4.6. График потенциальной энергии системы, описываемой выражением (4.7).

Эти особенности будут связаны с уровнем потенциальной энергии системы. В том случае, если ее величина будет выше уровня средней точки равновесия ($x = 0$), то колебания энергии в колебательной системе будут обычным нелинейным их вариантом. Если ниже – колебания будут совершаться в зоне справа или слева от центральной точки равновесия с соответствующим уменьшением их амплитуды и повышением частоты. В зоне с уровнем потенциальной энергии, соответствующим началу координат ($x = 0$), колебания могут приобретать хаотический характер. Для этого должен выполняться ряд дополнительных условий. Во-первых, в системе должно присутствовать жидкостное трение и, во-вторых, оно должно быть такой величины, чтобы за счет его влияния успевала рассеиваться энергия, вносимая внешним возбуждающим воздействием.

Перейдем к численному моделированию, для чего вначале понизим порядок дифференциального уравнения (4.3) в соответствии с теоремой Коши:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\omega_0^2 x - \alpha x^3 - k x_2 + F\cos\omega t\,. \end{aligned} \tag{4.8}$$

С использованием (4.8) проведено численное моделирование рассматриваемой системы – взаимодействие акватории, покрытой льдом, с приходящими волнами. Для обнаруженных периодов волн рассчитаны фазовые портреты, форма колебаний и отображение Пуанкаре, приведенные на рис. 4.7.

Отметим, что отображение Пуанкаре является хорошим способом анализа хаотического движения. Вместо того, чтобы рассматривать траекторию фазового пространства во все времена, которая дает непрерывную кривую, участок Пуанкаре является просто дискретным множеством точек фазового пространства частицы в каждый период внешней силы, т. е. при $t = 2\pi / \omega$, $4\pi / \omega$, $6\pi / \omega$ и т. д. Очевидно, что для периодической орбиты поле Пуанкаре является одной точкой; когда период удваивается, он состоит из двух точек и т. д.

Исследование реакции динамической системы, описываемой уравнением Дуффинга, в зависимости от входящих в уравнение параметров, находящихся в пределах, определенных из экспериментальных наблюдений, а именно периодов внешней силы и периодов собственных колебаний акватории, показало, что наибольшее влияние оказывает амплитуда внешнего воздействия. Видно, что с ее увеличением от 0.1 до 20 (рис. 4.7а, в) движение в системе переходит от периодического к хаотическому, на что указывают и отображения Пуанкаре (рис. 4.7б, г). И хаотические колебания сохраняются при изменении F от 17 до 36. При $F = 20$ к хаотическим колебаниям приводит изменение коэффициента нелинейности а от 5 до 10 и уменьшение коэффициента затухания от 0.1.

При возбуждении сейш на более коротких периодах, по сравнению с периодом приходящей зыби, в системе также наблюдаются хаотические колебания, например, на периодах близких к собственным колебаниям 3.04 с. И для развитого хаотического движения видим появление странной диаграммы – странного аттрактора (рис. 4.7г, е). Это предельный набор точек, к которым траектория стремится (после начального переходного процесса) каждый период внешней силы. Обратите внимание, что структура сложна, но не полностью случайна, видна некоторая структурированность.

Аналогичный вывод о том, что переход к хаосу происходит по мере увеличения внешней периодической силы в уравнении Дуффинга сделан и на основании исследований перехода к хаосу в нелинейной динамической системе, приведенных в работе [Young, 2015].

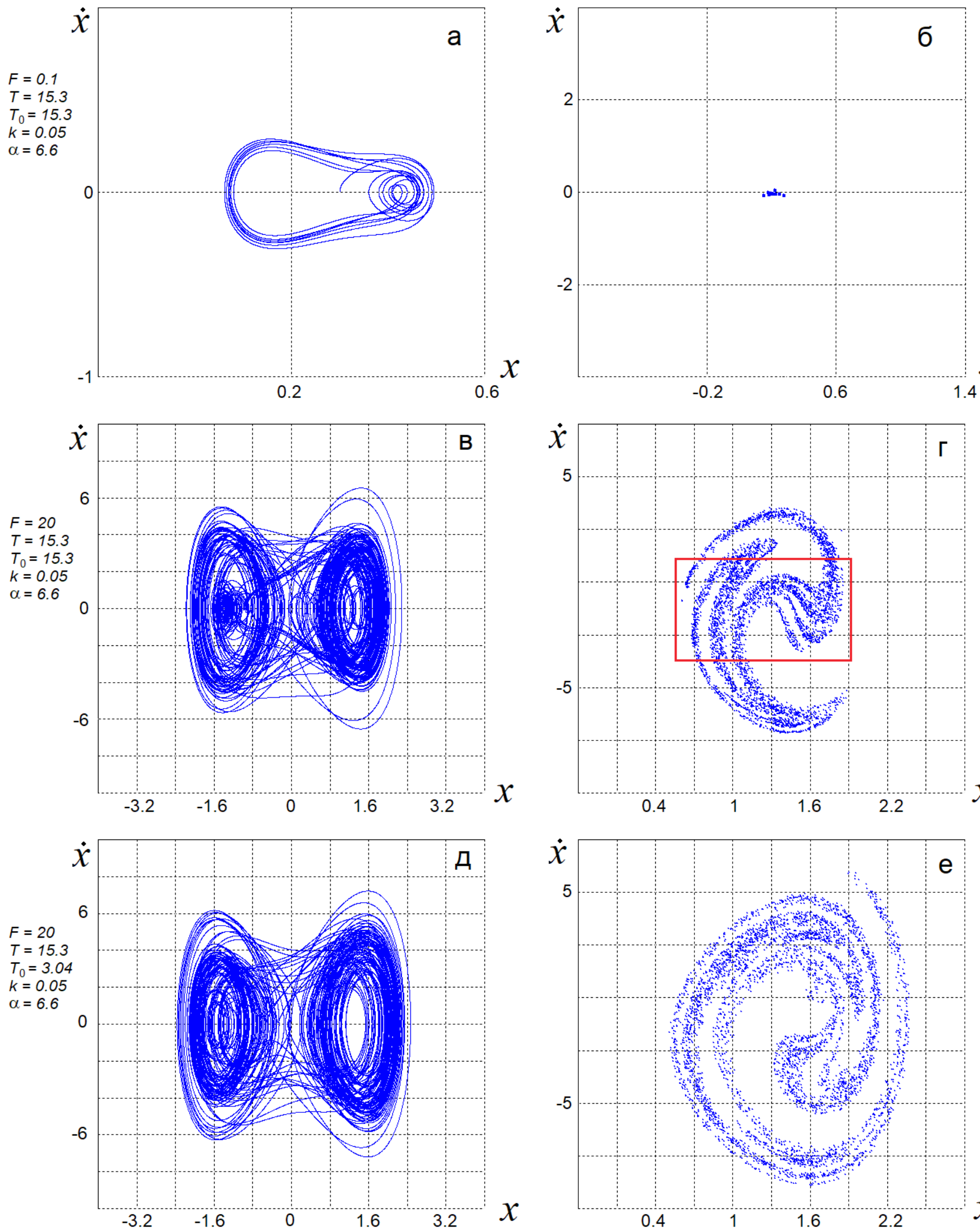


Рис. 4.7. Фазовые портреты и отображения Пуанкаре для рассматриваемой динамической системы. На рисунке г выделен фрагмент, представленный на рис. 4.8.

Таким образом, волны зыби большой амплитуды, проникая далеко под лед, способствуют возбуждению в ковше с. Охотское генерации хаотических колебаний на периодах собственных колебаний акватории ковша. При уменьшении амплитуды зыби хаотичность колебаний уменьшается и происходит переход к периодическим колебаниям.

При выбранных параметрах (рис. 4.7в, д) в области предельных циклов система находится либо в яме при положительном x, либо в яме при отрицательном x, в зависимости от точного значения F, но не «прыгает» между лунками. Однако в хаотической области система проходит между различными лунками.

Полученные нами при моделировании отображения Пуанкаре (рис. 4.7г, е) не «симметричны» относительно точки $x = 0$, что наблюдается в опубликованных работах других авторов [Мун, 1990; Young, 2015]. Поэтому были проанализированы фазовые портреты и отображения Пуанкаре, соответствующие нашим параметрам для уравнения Дуффинга.

В соответствии с начальными условиями ($x = 0$, $\dot{x} = 0$) в исходном состоянии система находится в неустойчивом равновесии на вершине горба потенциальной энергии (рис. 4.6). Оба силовых слагаемых, зависящих от x, равны нулю, а возмущающая сила в момент времени $t = 0$ равна F, поскольку $\cos(\omega \times 0) = 1$. Колебание начнет развиваться под ее действием в положительном направлении по x. Если дополнительный вклад силы $F = \cos(\omega t)$ в полную энергию E этого колебания окажется больше, чем потери кинетической энергии за счет вязкого трения, то при возвращении колебания к точке $x = 0$ уровень общей энергии будет больше нуля. Это позволит колебанию перейти в зону с $x < 0$. Если же потери за счет вязкого трения будут достаточно большими, то колебание так и не достигнет $x = 0$, т. к. общее снижение энергии приведет к тому, что колебание по x достигнет точки возврата еще раньше и начнется обратное движение в рамках правой потенциальной ямы. Колебание в этом случае стабилизируется с уменьшением амплитуды ближе ко дну ямы. Естественно, что подобное поведение колебания можно смоделировать и для левой потенциальной ямы. Для этого нужно заставить колебание изначально развиваться в отрицательную сторону, положив, например, $F = -F$ (внешнее колебание приходит в систему в противофазе). В этих двух случаях фазовая диаграмма будет формироваться по x либо на положительной, либо на отрицательной ее стороне. Подобная зависимость указывает на фазовую зависимость хаотических колебаний от фазы вынуждающей силы.

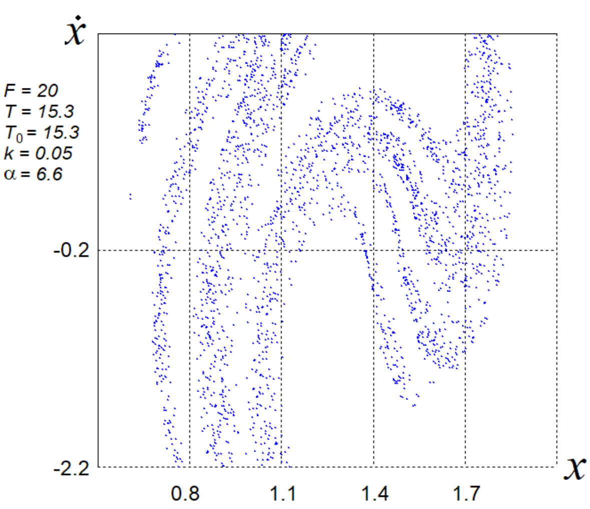


Рис. 4.8. Фрагмент графика отображения Пуанкаре, приведенного на рис. 4.7г.

Анализ полученного нами модельного отображения Пуанкаре для различных значений параметров, входящих в уравнение Дуффинга, также показал, что его вид существенно зависит периода и амплитуды внешней волны, а коэффициент затухания и нелинейности влияют в меньшей степени. И при уменьшении F до 0.05 и периодов внешней силы от 3 до 12 с сохраняется квазисимметричная форма отображения Пуанкаре, существующая как для положительных, так и отрицательных значений x.

Для более детального изучения структуры странного аттрактора выделялся фрагмент из рис. 4.7г, для диапазона значений $\dot{x}$ и x, который соответствует графику детального анализа, показанному на рис. 4.8. По этому графику отображения Пуанкаре хорошо видна фрактальная форма. Кроме того, на увеличенном фрагменте видны моменты начала удвоений периода при $x = 1.3$ и $x = 1.4$, т. е. при данных параметрах происходит бифуркационный переход.

4.5. Выводы

Установлено, что при прохождении атмосферных возмущений и генерации при этом сильной зыби, которая проникает под лед на большие расстояния и вследствие нелинейных эффектов, является причиной генерации сейш подо льдом в ковше рыбозавода с. Охотское. При этом происходит возбуждение нескольких мод сейш на некратных периодах.

Анализ был выполнен с учетом изменения периодов волнения подо льдом по сравнению с открытой водой и выводов модели для собственных колебаний жидкости в акватории ковша. Он показал, что возбуждаемые в портовом ковше сейши имеют период первой моды значительно короче – 15.34 с (табл. 4.1), чем получен с использованием модельного расчета – 60.9 с для первой моды. В то же время, наблюдается соответствие между рассчитанными и экспериментальными модами сейш. При этом наблюдаемые моды соответствуют только каждой четвертой из рассчитанных. Объяснение такому эффекту пока не получено.

Пик в энергетическом спектре на периоде 15.34 с соответствует периоду приходящей зыби, поскольку на открытом море зыбь для места наблюдения регистрируется на близких периодах. Также вполне вероятно, что зыбь возбуждает сейшу с тем же периодом, поскольку модельный расчет имеет моду колебаний на близком периоде.

Модельный расчет показал, что генерация продольных сейшевых мод хорошо описывается выражением, полученным В.Н. Зыряновым. При этом низшая мода сейш соответствует периоду зыби. Результаты расчета для периодов поперечных колебаний в ковше оказались далеки от наблюденных.

Проведено численное моделирование реакции акватории ковша – динамической системы, описываемой уравнением Дуффинга, в зависимости от входящих в уравнение параметров, которые находятся в пределах, определенных из экспериментальных наблюдений, а именно периодов внешней силы и собственных периодов колебаний акватории. Показано, в том числе и с использованием отображения Пуанкаре, что наибольшее влияние на переход системы к хаосу оказывает амплитуда внешнего воздействия. С ее увеличением от 0.1 до 20 колебания системы переходят от периодических к хаотическим.

Хаотические колебания начинают проявляться уже для $F = 2$, и для развитого хаотического движения представлены в виде странного аттрактора. Его структура сложна, но не полностью случайна, видна структурированность. Также для этих отображений Пуанкаре наблюдается фрактальная форма.

Знания поведения морских динамических систем для покрытого льдом моря нужны для определения возможности наступления хаотических колебаний большой амплитуды, которые могут привести к разрушению прибрежного припайного льда и представлять опасность для находящихся на нем рыбаков.

ГЛАВА 5

Взаимодействие инфрагравитационных волн со льдом

Волны на поверхности открытого моря распространяются как поверхностно-гравитационные волны. Часть этих волн, попадающая в диапазон периодов от 0.3 до 7 мин, называют инфрагравитационными (ИГ) [Рабинович, 1993]. При этом достаточно часто исследователи считают, как, например, в работе [Wadhams et al., 2009], что диапазон периодов ИГ волн несколько шире и составляет от 15 с до 7 мин. Полагают, что эти волны генерируются в результате нелинейных взаимодействий между штормовыми волнами зыби [Рабинович, 1993]. Проникая под лед, ИГ волны под воздействием ледового покрытия в зависимости от его толщины и свойств жидкости распространяются как изгибные гравитационные волны [Wadhams, 1986].

Основная часть энергии ИГ волн поглощается в прибрежных районах и считается, что эти волны важны для многих прибрежных процессов. Рассеяние на кромке льда ослабляет зыбь и высокочастотные поверхностные волны с периодами до 15 с. Кроме того, нерегулярности льда и пластическая деформация рассеивают энергию зыби внутри льда, ослабляя короткие волн сильнее, чем длинные. По сути, лед действует как фильтр нижних частот, частота среза которого во время разлома уменьшается с увеличением расстояния от открытого океана. По этой причине ИГ волны, которым удается достичь пакового льда, свободно распространяются.

Проводимые в ИМГиГ ДВО РАН многолетние наблюдения позволили нам также зарегистрировать подъем энергии зыби и ИГ волн даже в более широком диапазоне периодов под припаем, как показано, например, в [Menemenlis et al., 1995]. Изучение распространения волн зыби подо льдом припая в береговой зоне вызывает интерес, поскольку, обладая большой энергией и распространяясь без существенного затухания, они могут быть причиной разрушения припая в районе берега, его отрыва и, как следствие, создания опасности для судоходства, морских платформ добычи углеводородов и находящихся на льду рыбаков.

В работах [Arctic climate ..., 2004; Detection ..., 1999] было высказано предположение что ледяной покров «выбирает» предпочтительную «резонансную» частоту, при которой волна движется с той же скоростью подо льдом, что и в воде. Исходя из этого авторы настоящей работы решили определить периоды собственных колебаний ледяных пластин. И поскольку реальные льдины припая имеют сложную конфигурацию, для которой определить собственные частоты колебаний представляется очень сложным, рассмотрим в первом приближении три основные формы льдин – круглую, квадратную и прямоугольную, к которым при определенных допущениях можно отнести реальные льдины. Здесь рассматривается качественная (принципиальная) возможность совпадения собственных частот колебаний ледяных пластин с частотами ИГ волн.

5.1. Проведение измерений

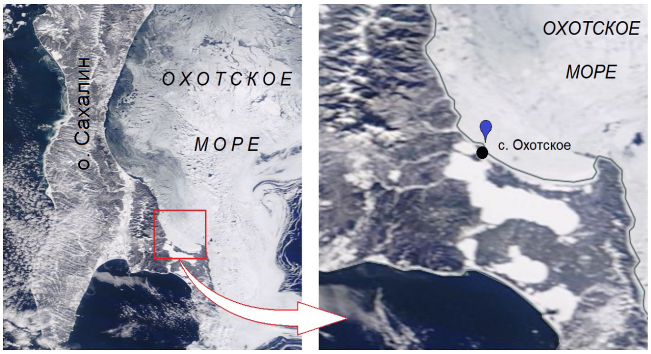


Рис. 5.1. Показан район наблюдения и место нахождения регистратора (21 января 2015 года) (использована карта с сайта worldview.earthdata.nasa.gov).

Наблюдения волнения подо льдом проводились ИМГиГ ДВО РАН в районе с. Охотское, юго-восточное побережье о. Сахалин, начиная с 2009 по 2017 год (рис. 5.1). Использовались донные измерители гидростатического давления с секундной дискретностью и температуры воды. В дальнейшем производился пересчет данных в амплитуды поверхностных волн с учетом глубины постановки измерителей. Для пересчета пульсаций давления в параметры волнения авторы использовали методику, описанную в [Заславский, Красницкий, 2001].

Зимой под влиянием восточных ветров ледяная масса Охотского моря прижимается к берегу, часть ледяных образований у берега садится на грунт, лед смерзается и становится припайным льдом, ширина которого в холодные зимы достигает нескольких сотен километров [Особенности развития ..., 2009; Думанская, 2015]. Толщина льда при наших измерениях составляла 0.5–3 м.

В результате этих измерений была получена многолетняя серия наблюдений за волнами подо льдом [Squire et al., 2021], показанная на рис. 4.2 в главе 4. Хорошо видно, что в период, когда море покрыто льдом, примерно с середины января по начало апреля, наблюдается фильтрация ветровых волн и короткой зыби, и в записях колебаний уровня отсутствуют штормовые волны, которые хорошо видны в декабре и с апреля. Полученные временные ряды были подвергнуты спектральному анализу.

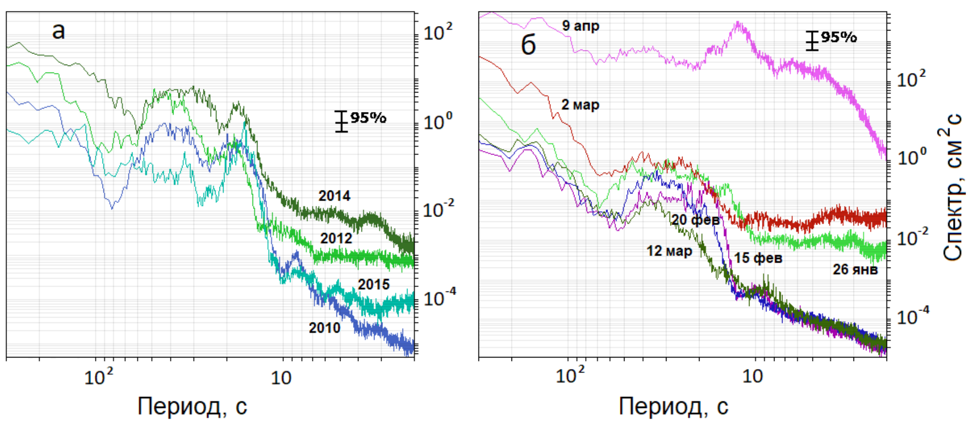


Рис. 5.2. Спектры волнения под припаем: а – для разных лет наблюдения в феврале месяце; б – для разных месяцев 2013 года, включая 9 апреля, когда припай отсутствовал.

На рис. 5.2 показаны спектры волнения подо льдом (припаем) за суточный период для разных лет наблюдения в феврале месяце с 2010 по 2015 годы и для разных месяцев 2013 года, включая 9 апреля, когда припай отсутствовал. На всех спектрах волнения подо льдом хорошо выделяется подъем энергии волнения в диапазоне периодов от 15 до 70 с. Величина этого подъема существенно превышает 95 %-ный доверительный интервал.

Подъем энергии в спектрах волнения в отмеченном диапазоне, рассчитанных по полученным нами данным, достаточно часто наблюдается неравномерным, в виде нескольких широких пиков, как например в 2015 году. По мнению авторов работы [Karmakar et al., 2009], такой несплошной спектр связан с отражением волн от ломанного льда по краю припая.

Для определения характеристик ИГ волн подо льдом в диапазоне периодов волн 15–70 с использовалось дисперсионное соотношение, полученное в работе [Wadhams, 1973] с дополнениями [Chu, 1986] и с учетом сжатия льдов и глубины, приведенного в работах [Liu, Mollo-Christensen, 1988; Chu, 1986]:

$$\omega^2(k) = \left[gk\rho_w + \frac{Eh^3k^5}{12(1-s^2)} - Phk^3\right] / (\rho_w \coth kD + \rho_i hk) , \tag{5.1}$$

где ω – частота волны, g – ускорение силы тяжести, ρ_w и ρ_i – плотности морской воды и морского льда соответственно (ρ_w = 1025 кг м$^{-3}$ и ρ_i = 900 кг м$^{-3}$), k – волновое число, h – толщина ледяной пластины, D – глубина воды. Используемые в выражении величины: E модуль упругости Юнга; для льда, $E = 6 \times 10^9$ Нм$^{-2}$; s – коэффициент Пуассона, для льда s = 0.3; P сжимающее напряжение в пакете льда; которое при чистом сжатии находится в диапазоне 10^6 Н м$^{-2}$ для морского льда [Mellor, 1983]. Следует отметить, что исследователи волн подо льдом пришли к схожим моделям и дисперсионным соотношениям для изгибно-гравитационных волн [Музылев, 2010; Marchenko et al., 2013].

С использованием выражения (5.1) для поверхностно-гравитационных волн с периодами от 15 до 70 с рассчитаны длины волн, которые составили от 349 до 7859 м, при этом дисперсионные кривые для разной толщины льда от 0.5 до 3 м практически совпадают, что говорит о слабой зависимости скорости распространения волн с этими периодами от толщины льда. Кроме того, считается, что на этих длинах волн лед ведет себя как эластичная мембрана [Ice flexure ..., 1991].

5.2. Колебания ледяной пластины

В работах [Arctic climate ..., 2004; Detection ..., 1999] было высказано предположение что ледяной покров «выбирает» предпочтительную «резонансную» частоту, при которой волна движется с той же скоростью подо льдом, что и в воде без ледяного покрова. В других работах исследуется взаимодействие между морскими волнами и ледяными пластинами [Porter, 2019] или воздействие давлений на плавающую упругую платформу [Стурова, 2002].

Эти исследования побудили авторов настоящей монографии определить периоды собственных колебаний ледяных пластин и их взаимодействие с морскими волнами. При этом, поскольку реальные льдины припая имеют сложную конфигурацию, для которых определить собственные частоты колебаний представляется очень сложным, рассмотрим в первом приближении три основные формы льдин – круглую, квадратную и прямоугольную (к ним при определенных допущения можно отнести реальные льдины). При этом учитываем, что мы рассматриваем качественную (принципиальную) возможность совпадения собственных частот колебаний ледяных пластин с частотами ИГ волн.

В работе [Liu et al., 1991] авторы считают допустимым рассмотрение поля небольших льдин как большие льдины на том основании, что, хотя отдельные льдины различимы, но связаны замороженным льдом и не являются полностью свободными. Также, для волн с длиной волны более 100 м можно пренебрегать узкими трещинами между льдами, так как отражения на краях трещин будут малы. Несмотря на это, изгибно-гравитационная волна, проходящая под однородным без трещин ледяным щитом, может рассеиваться иначе, чем в ледяном щите с многочисленными трещинами, поскольку его способность передавать изгибное напряжение при наличии трещин снижается. Однако сравнение, выполненное в [Liu et al., 1991] для модели с данными, показывает, что предложенная модель первого порядка для ледового поля, параметризованного как сплошной ледяной покров, имеет правильную тенденцию качественной оценки в отношении коэффициента затухания волны. Эти обстоятельства были учтены в настоящей работе.

Имеется достаточное большое число исследований, как отечественных, так и зарубежных, позволяющих оценить собственные частоты колебаний ледяной эластичной пластины [Тимошенко и др., 1985; Marchenko, 1991; Cho et al., 2013; Senjanović et al., 2014] и другие. В качестве основы мы использовали исследования [Тимошенко и др., 1985], а также [Cho et al., 2013], базирующиеся на теории толстых пластин, которая учитывает влияние сдвига и вращательную инерцию [Mindlin et al., 1956] и применима не только к тонким пластинам, но и к умеренно толстым и толстым.

В этих работах рассмотрены примеры расчета собственных частот для круглой, квадратной и прямоугольной пластин, результатами которых воспользуемся. Для квадратной и прямоугольной пластин в работе [Тимошенко и др., 1985] приведены соответственно следующие зависимости частоты собственных колебаний пластин от ее размеров, толщины и плотности. Для квадратной пластины:

$$\omega = \frac{\alpha}{a^2}\sqrt{\frac{D}{\rho h}}, \qquad (5.2)$$

где a – длина стороны квадрата, h – толщина пластины, ρ – плотность (льда), α – постоянная, зависящая от формы колебаний, D – изгибная жесткость пластины $D = Eh^3/[12(1\text{-}s^2)]$. Здесь E модуль упругости Юнга; для льда, $E = 6 \times 10^9$ Нм$^{-2}$; s – коэффициент Пуассона.

Для прямоугольной пластины:

$$\omega = \pi^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right), \qquad (5.3)$$

где a и b – длины сторон прямоугольника, m и n – целые числа, определяющие номер моды собственных колебаний пластины, $m = n = 1$ соответствует частоте низшей моды (основной формы) колебаний. Высшие формы колебаний получаем, положив, например, одно из чисел m или n равным 2, а другое 1 для частоты второй формы колебаний.

Для круглой пластины с незакрепленными краями

$$\omega = \frac{\Omega}{R^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}}, \qquad (5.4)$$

где Ω – частотный параметр, который рассчитывается для заданного числа узловых диаметров s и заданного числа узловых окружностей n.

При расчете собственных колебаний с использованием выражений (5.2–5.4) необходимо еще учитывать, что пластины помещены в жидкость. Для этого нужно полученные значения ω поделить на коэффициент κ, учитывающий плотность воды ρ и льда ρ_i [Тимошенко и др., 1985]:

$$\kappa = \sqrt{1 + 0,6689(\rho \ / \rho_i)(a / h)}. \qquad (5.5)$$

С использованием выше приведенных выражений (5.2–5.5) были рассчитаны зависимость периода собственных колебаний ледовой пластины от ее ширины (диаметра), которые приведены на рис. 5.3.

Видно, что чем толще лед и выше мода колебаний, тем для большей ширины льда возможно совпадение собственных периодов колебаний ледяной пластины с распространяющимися под ней ИГ волнами. Такая тенденция к достижению общих ритмов взаимного поведения является тенденцией к синхронизации, а подстройка ритмов является сущностью синхронизации [Hayashi, 1964; Пиковский и др., 2003; Осипов, Половинкин, 2005]. И в рассматриваемом случае возможен захват (синхронизация) собственных колебаний ледяной пластины колебаниями приходящих под нее волн. Это, возможно, и обуславливает их распространение с минимальными потерями энергии.

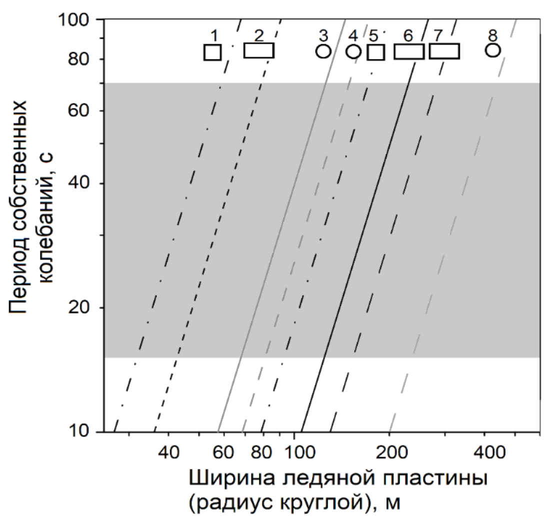


Рис. 5.3. Зависимость периода собственных колебаний ледяной пластины от ее ширины (диаметра). Размеры прямоугольной пластины 3:1. Выделена область подъема энергии ИГ волн подо льдом.

Следует также отметить, что в работе рассматривается случай синхронизации осциллятора внешней периодической силой, т. е. явление вынужденной синхронизации. В классической теории синхронизации регулярный (нехаотический) осциллятор, управляемый периодическим сигналом – исторически первая изученная модель [Пиковский и др., 2003]. К настоящему времени написано много статей и книг, посвященных теме синхронизации, где ее теория представлена подробно, например [Пиковский и др., 2003]. Поэтому сама модель здесь рассматривается кратко, а основное внимание уделяется полученным численным результатам.

5.3. Синхронизация осциллятора Ван дер Поля: численный эксперимент

Проходящие подо льдом волны ослабляются наличием трещин и рассеяния волновой энергии при входе под лед, поэтому пришедшие в район измерений волны имеют небольшие амплитуды и обычно слабонелинейны [Squire, Allan, 1980]. Это дает возможность применить к уравнениям методы усреднения и позволяет получить универсальные уравнения, которые могут быть проанализированы достаточно подробно, хотя количественные предсказания возможны только для малоамплитудных самоустанавливающихся колебаний [Боголюбов, Митропольский, 1958; Пиковский и др., 2003; Кузнецов и др., 2005].

В основе этих методов лежит метод Ван дер Поля, который является достаточно эффективным для исследования нелинейных систем. При его использовании система заменяется упрощенной, получаемой усреднением правых частей по «быстрому» переменному. Для применения метода Ван дер Поля не требуется никаких предположений о природе сил, под действием которых происходят колебания [Боголюбов, Митропольский, 1958; Кузнецов и др., 2005].

С учетом выше сделанных замечаний для моделирования поведения динамической автоколебательной системы с внешним воздействием была рассмотрена автоколебательная система в виде предельного цикла системы Ван дер Поля для случая слабого и произвольного периодического воздействия на регулярную автоколебательную систему. Задача численного эксперимента заключалась в том, чтобы проверить возможность синхронизации системы с приходящими волнами.

Проблема влияния периодической внешней силы на осциллятор Ван дер Поля была изучена во многих работах и подробно описана во многих книгах и обзорах. Нами был выполнен численный эксперимент с использованием осциллятора Ван дер Поля для полученных из натурных экспериментов параметров, описываемый системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Модельная система в данном случае имеет вид [Осипов, Половинкин, 2005]:

$$\dot{x} = y,$$

$$\dot{y} = -\omega_0^2 x + \mu\left[\left(1 - x^2\right)y + 2\varepsilon \sin \omega t\right], \tag{5.6}$$

где ω_0 – собственная частота осциллятора, μ – малый параметр (нелинейности), ε и ω – амплитуда и частота внешней силы, соответственно. Наличие малого параметра позволяет исследовать поставленную задачу с использованием асимптотических методов, как описано в первой главе. При этом решение задачи синхронизации может быть сведено к анализу состояний равновесия в уравнении:

$$\dot{a} = -i\Delta a + a - \left|a^2\right| a - \varepsilon\,, \tag{5.7}$$

где a – средняя комплексная амплитуда колебаний и $\Delta = (\omega^2 - \omega^2_0)/\ \omega^2$ – относительная частотная расстройка. Устойчивое состояние равновесия в уравнении (5.7) соответствует синхронному режиму в исходной системе (5.6).

Обозначим $a(t) = R(t)\ \exp\ [i\ \theta(t)]$, где $R(t)$ – действительная амплитуда колебаний, а $\theta(t)$ – разность между фазой осциллятора и фазой внешнего сигнала. Опустим простые арифметические вычисления и представим только основные особенности синхронизационных переходов, происходящих при изменении параметров системы (5.7). Так как рассматривается синхронный режим ($\dot{R} = 0,\quad \dot{\theta} = 0$), то можно получить кубическое уравнение для квадрата амплитуды $R^2 = \backslash a \backslash^2$ [Осипов, Половинкин, 2005]:

$$R^2\ (1\text{-}R^2)^2 + \Delta^2 R^2 = \varepsilon^2\ / \tag{5.8}$$

С использованием уравнения (5.8) выполнен расчет функции $f\ (R) = R^2\ (1–R^2)^2 + \Delta^2 R^2 – \varepsilon^2$ и построены графики, приведенные на рис. 5.4, для различных значений параметров Δ и ε . Видно, что при Δ = 0.1 и ε = 0.1 уравнение имеет четыре корня, а при увеличении расстройки Δ или амплитуды внешней силы ε остаются 2 корня.

Имея кривую состояния равновесия, можно определить знаки производной $f(R)$ в образовавшихся областях. Значения R, при которых производная равна 0, являются бифуркационными [Кузнецов и др., 2005]. Используя предыдущие результаты, построим бифуркационную диаграмму, на которой расположены устойчивые и неустойчивые состояния равновесия (рис. 5.5).

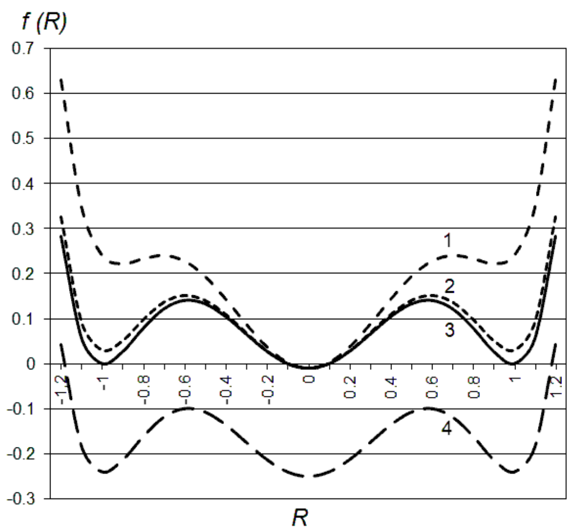


Рис. 5.4. Зависимость f (R) для следующих параметров: 1 – Δ = 0.5, ε = 0.1; 2 – Δ = 0.2, ε = 0.1; 3 – Δ = 0.1, ε = 0.1; 4 – Δ = 0.1, ε = 0.5.

С использованием системы уравнений (5.6) были рассчитаны фазовые портреты осциллятора для разных значений параметров расстройки Δ, амплитуды внешней волны ε и параметра нелинейности μ. Поскольку диапазон периодов при-

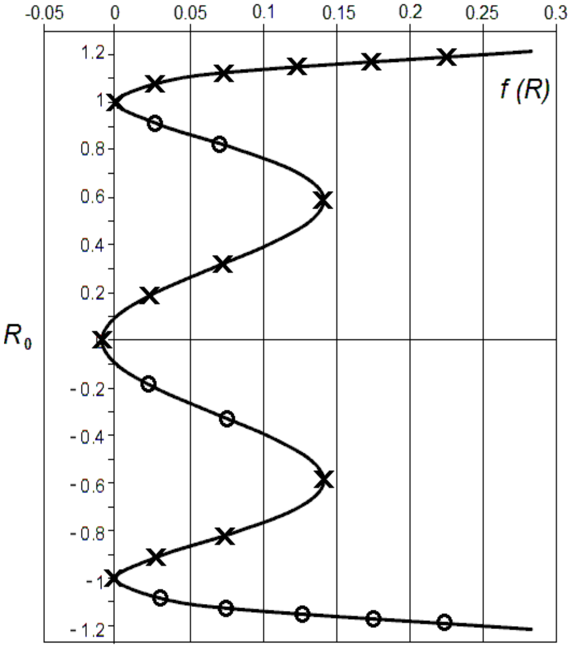


Рис. 5.5. Бифуркационная диаграмма для параметров $\Delta = 0.1$, $\varepsilon = 0.1$. Обозначения: о – устойчивое состояние равновесия, × – неустойчивое состояние равновесия. R_0 – координаты состояния равновесия.

ходящих под лед волн достаточно широкий, фазовые портреты были получены для крайних точек диапазона – 15 секунд и 1 минута. Результаты приведены на рис. 5.6.

Видно, что при точном совпадении периодов собственных колебаний осциллятора T_0 = 0.25 мин (частота ω_0) и периодов колебаний внешней силы T = 0.25 мин (частота ω), т. е. $\Delta = 0$ и $\mu = 0.1$, $\varepsilon = 0.1$, колебания слабо-нелинейного осциллятора Ван дер Поля при малых амплитудах вынуждающей силы близки к гармоническим (рис. 5.6*а*) и синхронизованы с внешней силой. При небольшой расстройке, когда $T \neq T_0$ = 0.26 мин, осциллятор переходит в режим биений, что видно по модуляции колебаний системы (рис. 5.6*б*), и в этом случае происходит нарушение синхронизации [Осипов, Половинкин, 2005].

При увеличении амплитуды внешней силы до $\varepsilon = 0.5$, равных периодах $T_0 = T$, $\Delta = 0$ и $\mu = 0.1$ (рис. 5.6*в*) колебания осциллятора также близки к гармоническим и синхронизованы с внешней силой. Однако диапазон периодов, при которых синхронизация сохраняется, в этом случае больше. Режим биений наблюдается при увеличении T_0, более 0.318 мин (рис. 5.6*г*).

Фазовый портрет колебаний слабо-нелинейного осциллятора Ван дер Поля при малых амплитудах с периодами T_0 = 1 мин и периодом колебаний внешней силы T = 1 мин, $\mu = 0.05$, $\varepsilon = 0.1$ отличается от ранее рассмотренного. В этом случае даже при меньшей величине μ нелинейность колебаний больше, о чем говорит вид фазового портрета (рис. 5.6*д*). С увеличением расстройки при T_0 = 1.5 мин синхронизация сохраняется, но выход на синхронный режим занимает больше времени (рис. 5.6*е*). Увеличение амплитуды вынуждающей силы приводит к увеличению нелинейности колебаний (рис. 5.6*ж*), и при расстройке также наблюдается более медленный вход в синхронизацию (рис. 5.6*д*).

Как показали рассчитанные нами фазовые портреты, для периодов T_0, соответствующих второй и третьей субгармоникам и ультагармоникам, наблюдается синхронизация слабо-нелинейного осциллятора Ван дер Поля внешней силой. При этом для периода колебаний внешней силы T = 1 мин синхронизация наблюдается для второй, третьей и даже десятой гармоник, в то время как для периода 0.25 мин синхронизация проявляется с третьей и высших гармониках колебаний ледяной пластины, но нелинейность колебаний при этом нарастает.

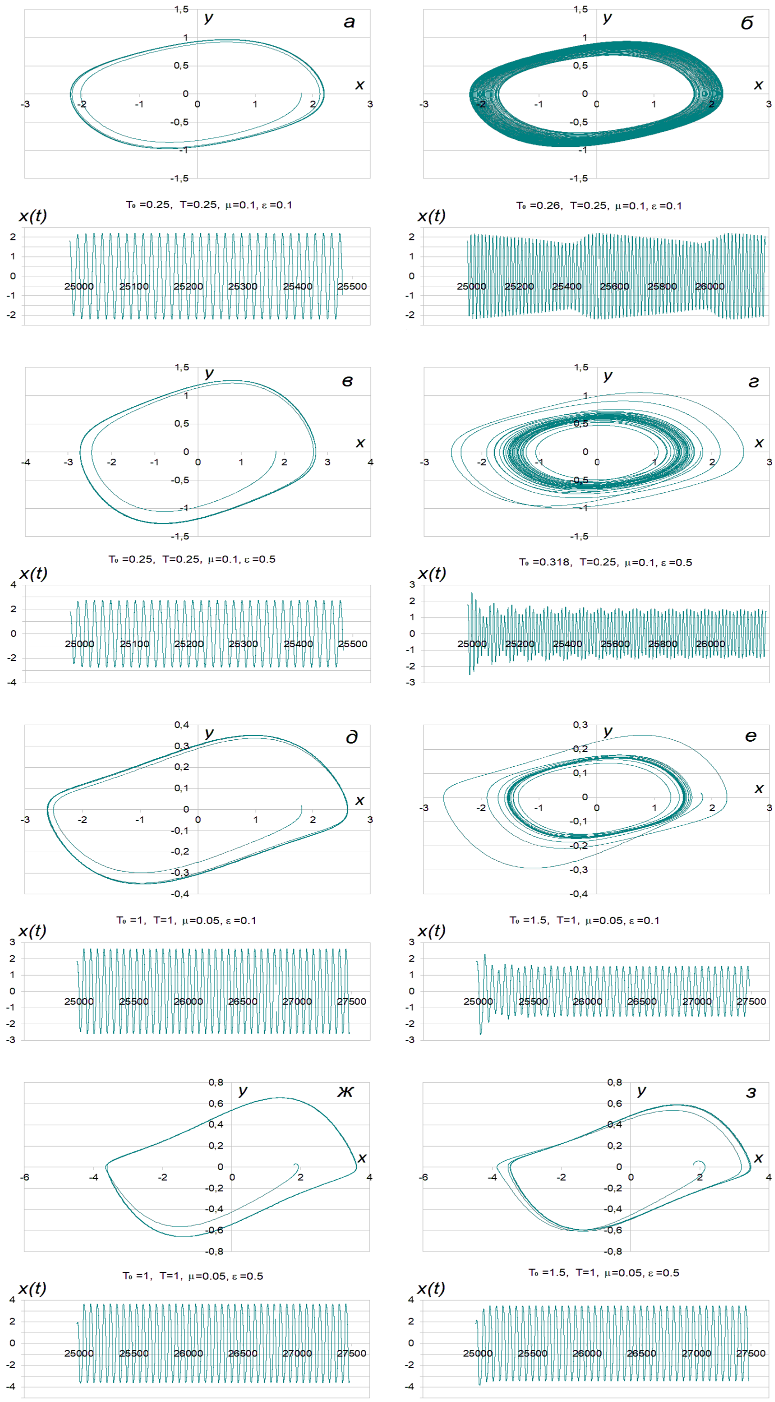


Рис. 5.6. Фазовые портреты и графики колебаний $x(t)$.

Таким образом, численный эксперимент, выполненный для зарегистрированных периодов инфрагравитационных волн, подтверждает возможность синхронизации ими слабо-нелинейного осциллятора – ледяной пластины. Поскольку при этом осциллятор выступает в роли резонансной системы, то приходящие волны не испытывают значительного затухания. Это может являться причиной распространения ИГ волн подо льдом на большие расстояния.

5.4. Выводы

По результатам натурных экспериментов по измерению волнения подо льдом показано, что ИГ волны в диапазоне периодов 15–70 с имеют большую энергию, по сравнению с фоновыми колебаниями уровня, и распространяются подо льдом на большие расстояния.

Проведено исследование в рамках сделанного в зарубежных работах предположения, что ледяной покров «выбирает» предпочтительную «резонансную» частоту, при которой волна движется с той же скоростью подо льдом, что и в воде без ледяного покрова. Для этого был проведен анализ собственных колебаний пластин различной формы – круглой, квадратной, прямоугольной, рассчитаны частоты собственных колебаний ледяных пластин разного размера и толщины для трех различных форм.

Установлено, что чем толще лед и выше мода колебаний ледяной пластины, тем для большей ширины льда возможно совпадение собственных периодов колебаний ледяной пластины с распространяющимися подо льдом ИГ волнами. В этом случае возможна синхронизация и распространение ИГ волн с минимальными потерями энергии.

Океанские волны могут легко создавать достаточное напряжение в льдине, чтобы вызвать ее разрушение, когда длина льдины составляет значительную часть длины волны или больше [Of ocean waves ..., 1995]. Это очевидный факт из теории волн. Волны хорошо взаимодействуют с объектами, имеющими размеры, близкие к ее длине или кратными ей. Здесь исследуются волны, для которых минимальная расчетная длина волны составляет около 350 метров. И, следовательно, взаимодействие волн со льдом, приводящее к его разрушению, будет происходить при размерах льда более 300 метров.

С использованием численного эксперимента на модели осциллятора Ван дер Поля с влиянием периодической внешней силы построена бифуркационная кривая и определены области устойчивого и неустойчивого состояния равновесия системы.

Построенные фазовые портреты осциллятора Ван дер Поля для разных расстроек, параметра нелинейности и амплитуд колебаний внешней силы показали возможность синхронизации осциллятора (ледяной пластины) внешними волнами. Поскольку при этом осциллятор выступает в роли резонансной системы, то приходящие ИГ волны не испытывают значительного затухания и могут распространяться на большие расстояния.

В случае, если периоды собственных колебаний льдины существенно больше периодов ИГ волн, то, согласно выполненного численного эксперимента, а также выводов работы [Хаяси, 1968], возможен захват свободных колебаний ледяной пластины на субгармониках или при большой ширине льда возможно проявление гармонического захвата, когда частота вынуждающей силы значительно отличается от частоты системы.

ГЛАВА 6

Захват волн резонансной прибрежной акваторией на юго-восточном шельфе о. Сахалин

6.1. Явление захвата – синхронизации

Пристальное внимание ученых привлекает «пограничные волны», которые доминируют в зоне шельфа – континентального склона в экваториальной зоне, а также вблизи фронтальных разделов, поскольку они оказывают существенное влияние на разнообразные процессы в океане, играют важную роль в динамике прибрежной зоны, приводят к появлению своеобразных явлений и эффектов, таких, например, как береговые фестоны и разрывные течения.

Вблизи морской береговой границы выделяют один из основных эффектов, имеющий большое значение – «захват» волновой энергии, при котором шельфовая зона играет роль волновода, способного переносить волновые возмущения на большие расстояния без существенной потери энергии [Clarke, 1974; Рабинович, 1993]. Для баротропных движений одним из основных типов топографического захвата является гравитационный захват в области мелководья – краевые волны (гравитационные волны Стокса) [Волны ..., 1985]. Вследствие уменьшения фазовой скорости гравитационных волн на мелководье происходит эффект захвата, аналогичный эффекту полного внутреннего отражения в оптике, происходит образование краевых волн. Изучение условий захвата проводится как с помощью математических моделей, так и с использованием данных натурных наблюдений [The Australian ..., 1986; Rodney, Johnson, 2011; Haines et al., 1991; Martinez, Allen, 2003; Pearce, 2011; Nhantumbo, 2014]. Однако такие исследования с использованием натурных экспериментов для диапазона периодов волнения от десятков секунд до единиц часов, проведенные в прибрежной зоне о. Сахалин, в северо-западной части Тихого океана отсутствуют.

В этой связи, одной из задач проведения натурных исследований Институтом морской геологии и геофизики ДВО РАН в прибрежной зоне моря как раз и является экспериментальное изучение условий захвата и генерации краевых волн. При этом, по сложившейся в ИМГиГ ДВО РАН традиции под установленные заранее цели исследований, определяющие пространственные масштабы расстановки и количество измерителей волнения, проводится установка датчиков на морское дно. После проведения наблюдений полученные данные (временные серии) вводятся в компьютер и анализируются на предмет наличия в них различного типа волн или аномальных колебаний, и после этого выполняется интерпретация обнаруженных волновых процессов с использованием существующих или предложенных моделей.

В данной работе по результатам спектрально-временного анализа данных наблюдений был установлен неограниченный рост фазы волновых процессов с периодом около 11 мин. Объяснение такого поведения фазового спектра оказалось возможным дать только с использованием модели осциллятора Ван дер Поля для случая синхронизации частоты резонансной системы (прибрежной акватории) частотой приходящих волн, при котором и наблюдается неограниченный рост фазы с фазовыми перескоками с частотой биений [Kovalev, Kovalev, 2017].

Под захватом здесь понимается взаимодействие автоколебательных систем, а именно водной акватории, обладающей резонансными свойствами, и приходящей волной. Согласно определению, данному в [Пиковский и др., 2003], если рассогласованность автономных систем не очень велика, то частоты двух систем становятся равными или захваченными, т. е. наступает синхронизация. И поскольку фаза осциллятора однозначно определяет его состояние, рассматривается фазовая синхронизация.

6.2. Описание эксперимента и полученных данных

На участке взморья между селом Охотское и мысом Свободный на юго-восточном побережье о. Сахалин, ИМГиГ ДВО РАН в 2011 году начал комплексные исследования, включавшие инструментальные измерения морских волн в широком диапазоне периодов. В прибрежной зоне 18 июня 2011 г. были установлены 4 автономных регистратора волнения и уровня АРВ (номера приборов 57, 59, 68 и 69). Пятый прибор (номер 32) был установлен непосредственно в ковше бывшего рыбозавода с. Охотское. На рис. 6.1 показаны места постановок приборов и батиметрическая карта, которая была построена по данным батиметрической съемки, проведенной с помощью эхолота-картплоттера Lowrence. Эта батиметрия использовалась для численного моделирования и определения резонансных частот акватории прилегающей к с. Охотское.

В результате проведенных наблюдений были получены продолжительные записи волновых процессов с дискретностью 1 с. Визуальный анализ записей показал наличие в них пакетов низкочастотных колебаний уровня с периодом около 10.7 мин (рис. 6.2), причем подобные структуры наблюдались достаточно часто. Вариации уровня с близкими периодами наблюдалась на юго-восточном побережье о. Сахалин и ранее – в районе протоки оз. Изменчивое, а также вблизи м. Острый, несколько севернее с. Охотское. Там волновые пакеты были менее устойчивы и отмечены реже, были короче и состояли из 3–5 колебаний.

Сравнительно устойчивый характер выявленных колебаний указывает на их связь с характером локальной топографии в изучаемом районе. Как показано в работе [Ковалев и др., 2015], обнаруженные на открытом участке побережья колебания с периодом около 10.7 мин являются захваченными краевыми волнами, и на данном периоде можно ожидать усиления колебаний при опасных морских явлениях, таких как волны цунами или штормовые нагоны. Именно это обстоятельство, а также их возможное влияние на формирование прибрежного рельефа, определяет интерес к подобным особенностям волнового режима в прибрежных акваториях. Следует отметить, что возбуждение ветром захваченных волн изучалось в работах других авторов [Zamudio et all., 1969] для разных прибрежных зон.

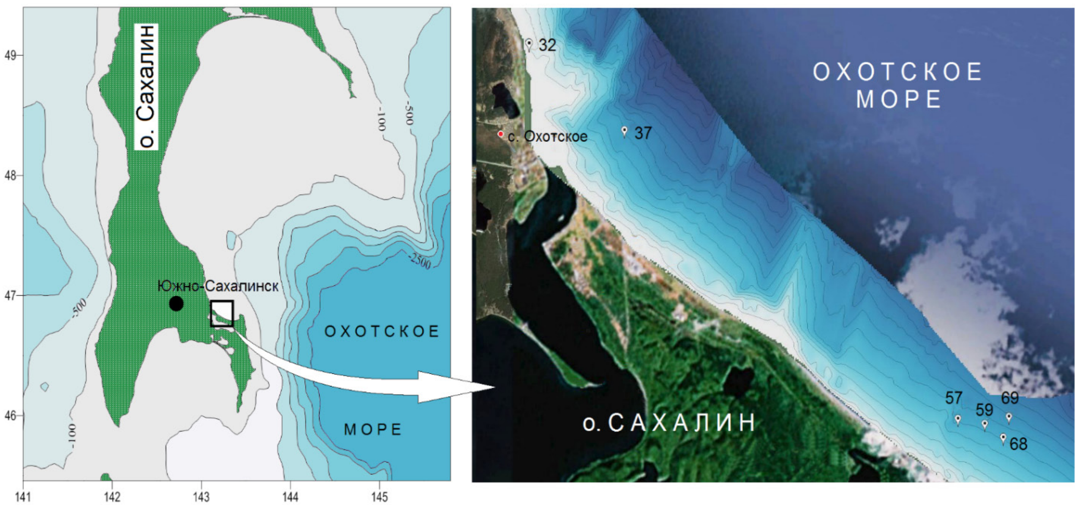


Рис. 6.1. Схема изучаемого участка юго-восточного побережья о. Сахалин. Показано положение автономных регистраторов волнения – донных станций.

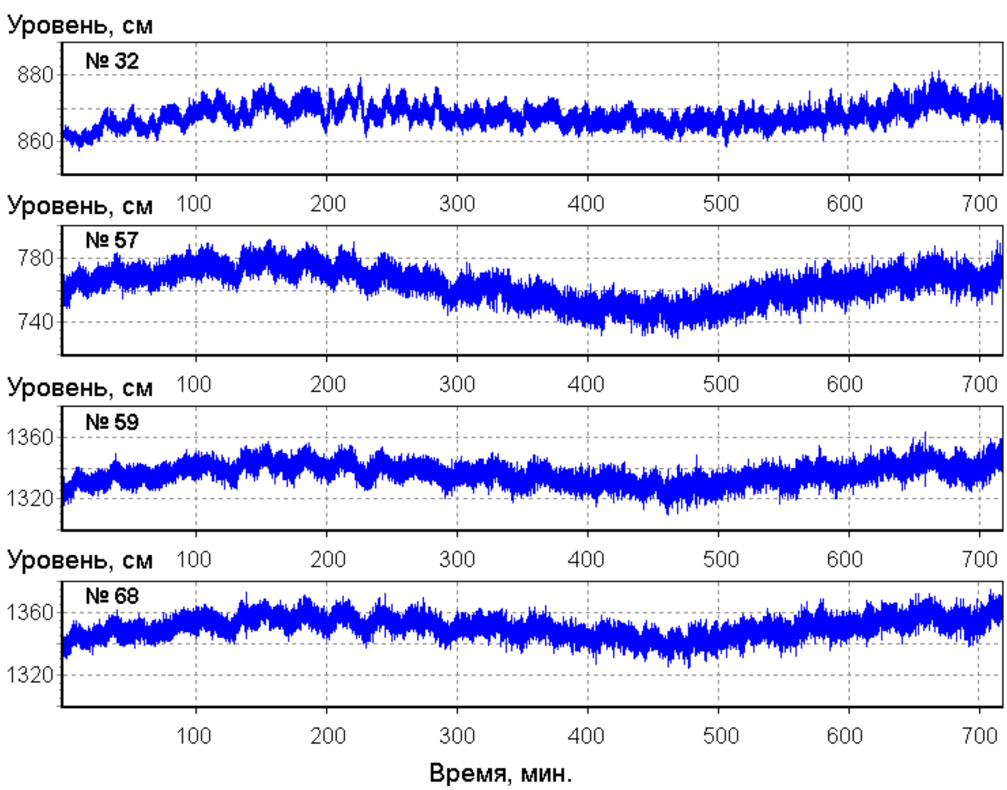


Рис. 6.2. Образцы синхронных записей колебаний уровня 20.06.11 для четырех станций, содержащие хорошо выраженные пакеты низкочастотных колебаний.

Определить структуру колебаний на периодах около 10.7 мин можно только по достаточно разнесенным станциям. Для этой цели не годились 4 станции, выставленные на небольшом расстоянии друг от друга, используемые для сравнительного анализа характеристик ветрового волнения и длинных инфрагравитационных волн с гораздо меньшими пространственными масштабами. Однако датчик 32 располагался на достаточном удалении – 7.2 км от станции 59 и 7.5 км от станции 68, т. е. имелась возможность провести изучение обнаруженных волн.

Анализ метеоданных показал, что в моменты генерации пакетов краевых волн наблюдались вариации скорости ветра, близкие к ним по периоду флуктуаций. Для полученных синхронных записей колебаний уровня моря и скорости ветра [Ковалев и др., 2015] отмечено хорошее согласование между направлением (SSW соответствует подъему уровня) векторов скорости ветра и флуктуациями уровня моря. Такое согласование наблюдается для 3–5 колебаний уровня, затем синхронизация ветра и уровня нарушается, хотя факт наличия тесной связи выглядит удивительным, так как для формирования длинных волн под воздействием ветра рассматриваемые периоды являются слишком короткими. Анализ функции когерентности между уровнем моря и ветром показал наличие хорошо выделяющегося пика на периодах около 10.7 мин, который значительно превышал когерентность на других периодах, однако его величина была несколько ниже 95 %-ного доверительного уровня.

Таким образом, экспериментальные исследования, выполненные на юго-восточном побережье о. Сахалин, выявили наличие колебаний с периодами около 10.7 мин, которые проявляются в записях придонного гидростатического давления. Наиболее устойчивы эти длинноволновые процессы в районе с. Охотское, где они связаны с проявлением первой моды захваченных краевых волн [Рабинович, 1993]. Наиболее вероятно, что эти волны формируются под влиянием вихревых вариаций скорости ветра (такая связь установлена для стационара ИМГиГ «Остромысовка», на котором производились измерения метеопараметров при помощи автономной цифровой метеостанции).

В работе [Ковалев и др., 2015] показано также, что на анализируемой длине рядов колебаний уровня моря в 1 месяц наблюдается рост разности фаз между станцией 32 и группой удаленных станций, в частности 68. Такое явление наблюдается авторами впервые, может быть потому, что в предыдущих экспериментах расстояние между станциями не превышало нескольких сотен метров и заметить на этом расстоянии данный эффект не представлялось возможным. Представляет интерес анализ поведения фазы на длинных рядах и интерпретация полученных результатов.

6.3. Анализ данных наблюдений

Для оценки взаимосвязи между станциями № 32–№ 68 мы рассчитали когерентность и фазу между полученными временными рядами с акцентом на волновые процессы с периодами около 10.7 мин. Функция комплексной когерентности дается в [Marple, 1987]:

$$r_{xy}(f) = \frac{S_{xy}(f)}{\sqrt{S_{xx}(f)S_{yy}(f)}}, \tag{6.1}$$

где $S_{xy}(f)$, $S_{xx}(f)$ и $S_{yy}(f)$ являются взаимными и автоспектрами соответственно.

Когерентность или средняя квадратичная когерентность (MSC) между двумя процессами x (t) и y (t) задаются формулой

$$r_{xy}(f) = \left| r_{xy}(f) \right|^2. \tag{6.2}$$

Фазовый спектр между двумя процессами задается формулой

$$\theta_{xy}(f) = \tan^{-1}\left[\frac{\mathrm{Im}\left(r_{xy}(f)\right)}{\mathrm{Re}\left(r_{xy}(f)\right)}\right]. \tag{6.3}$$

MSC измеряет линейную корреляцию между двумя временными рядами на каждой частоте и непосредственно аналогична квадрату коэффициента корреляции в линейной регрессии. В более общем смысле, когерентность описывает все свойства корреляции между физическими величинами одной волны или между несколькими волнами или волновыми пакетами. Когерентность фазы обычно интерпретируется как фазовое опережение одного сигнала над другим.

Рассмотрим результаты расчета спектральных характеристик для нескольких станций № 32–№ 68. Для построения диаграмм мы использовали «стандартную» программу спектрального анализа на основе работ [Дженкинс, Ваттс, 1971; Бендат, Пирсол, 1989] и других.

Диаграммы когерентности и фазы длительности более 3 месяцев для станций № 32 и № 68 (рис. 6.3) показывают существование устойчивой связи длинноволновых процессов с периодами около 10.7 мин. Более того, согласованность между результатами, полученными для рассматриваемых станций, представляется довольно высокой, поскольку она превышает уровень достоверности. Уровень достоверности для когерентности равен 0,4 для вероятности 95 %. Захваченная волна в основном наблюдается в диапазоне когерентности от 0.4 до 0.6.

Представляет интерес неограниченный рост фазы для волн с периодом 10.7 мин, который хорошо прослеживается на рис. 6.3. Следует отметить, что при суточном осреднении рост фазы достаточно равномерный. В то же время, для более детального расчета разности фаз колебаний уровня моря станций № 32 и № 68 по 2-часовым отрезкам наблюдается плавное с резкими перескоками, с периодом около 10 часов, изменение фазы. Было сделано предположение, что рост фазы связан, по-видимому, с тем обстоятельством, что осциллятор (резонансная прибрежная акватория) синхронизируется краевой волной, возбужденной ветром, имеющей период близкий к периоду собственных колебаний прибрежной акватории, т. е. наблюдается явление захвата волны.

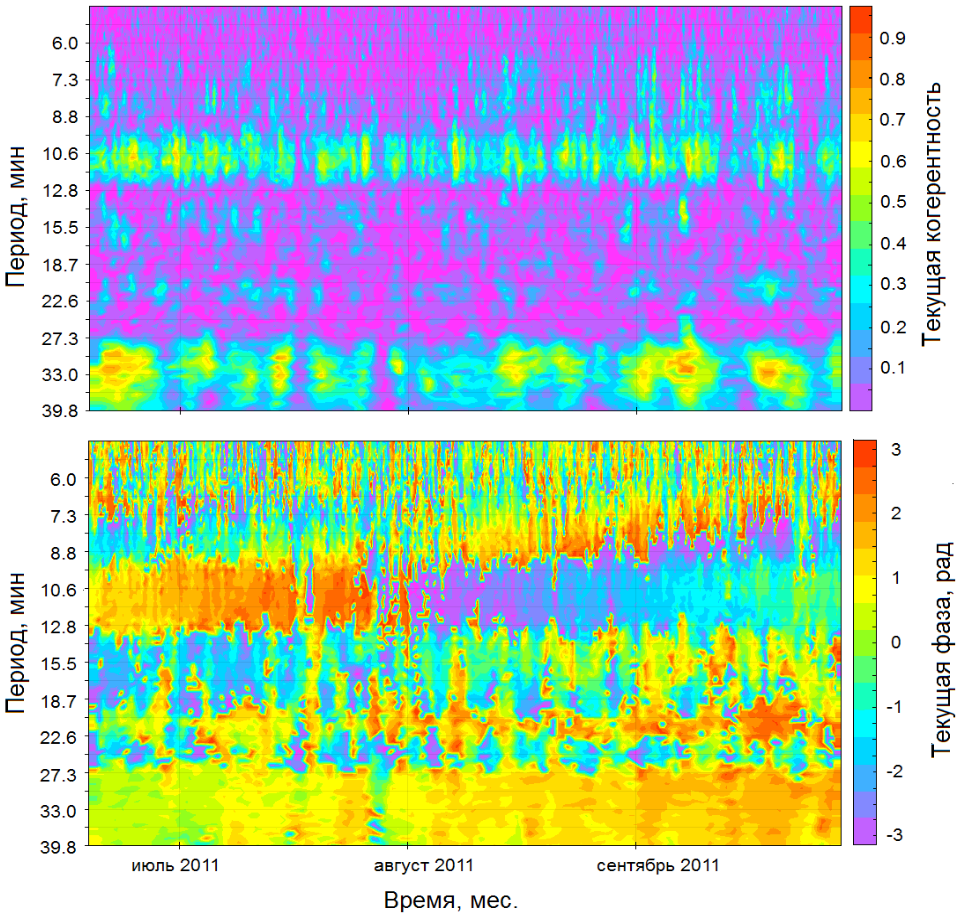


Рис. 6.3. Текущие когерентность и фаза колебаний уровня моря для станций № 32–№ 68.

6.4. Модель синхронизации

Анализ состояния современных исследований по динамическим системам и фазовой синхронизации по работам [Ott, 2002; Horita et al., 2008; Fujiwara, Kurths, 2009; Pazo et all., 2000; Vadivasova et al., 2001] и другим, показал, что для объяснения отмеченного неограниченного роста фазы необходимо рассмотреть синхронизацию регулярной автоколебательной системы (прибрежной акватории) внешней периодической силой – возбужденной ветром волной. Считается, что осциллятор синхронизируется внешним периодическим воздействием, если его наблюдаемая частота становится равной частоте внешнего сигнала [Пиковский и др., 2003; Осипов, Половинкин, 2005]. И наиболее соответствующей рассматриваемому здесь случаю является модель слабого и произвольного периодического воздействия на регулярную автоколебательную систему – осциллятор Ван дер Поля.

Рассмотрим колебания в периодическом осцилляторе под слабым периодическим воздействием [Осипов, Половинкин, 2005]:

$$\dot{x} = F(x) + p(t)\,, \tag{6.4}$$

где x и F – n-мерные векторы, $p(t)$ – периодическая (с периодом T) внешняя сила с амплитудой ε. Предположим, что автономная система (ε = 0) имеет устойчивый предельный цикл периода T_0, т. е. $x_0(t) = x_0(t + T_0)$ с однородно растущей вдоль цикла фазой φ. Следовательно,

$$\dot{\varphi} = \omega_0\,, \tag{6.5}$$

где $\omega_0 = 2p/T_0$ – частота периодических колебаний.

Если амплитуда внешней силы мала (ε << 1), то задача о вынужденной синхронизации системы может быть проанализирована в рамках следующей модели [Осипов, Половинкин, 2005]:

$$\dot{\varphi} = \omega_0 + \varepsilon q(j — \omega t), \tag{6.6}$$

где q – периодическая функция от φ и ω с периодом 2π и ω = $2\pi/T$ – частота внешней силы с амплитудой ε [Пиковский, Розенблюм, Курте, 2003].

После введения разности θ между фазой внешней силы ωt и фазой колебаний φ и усреднения уравнения (6.6) за период колебаний внешней силы, получим:

$$\dot{\theta} = \delta - \varepsilon q(\theta), \tag{6.7}$$

где δ = ω_0-ω – частотная расстройка. В самом простом случае (для квазигармонических колебаний) $q(\theta) = \sin\theta$. В этом случае уравнение (6.7) примет вид:

$$\dot{\theta} = \varepsilon \sin\theta = \delta. \tag{6.8}$$

Введем параметр Δ = δ/ε и новое время $t' = \varepsilon t.$ Тогда уравнение (6.8) перепишется в виде:

$$\dot{\theta} + \sin\theta = \Delta\,. \tag{6.9}$$

При |Δ| > 1 модель (6.9) не имеет состояний равновесия. Имеет место неограниченное нарастание переменной θ. В этом случае систему (6.9) называют *активный ротатор*. В уравнении (6.9) при $|\Delta| < 1$ существует два состояния равновесия: устойчивое и неустойчивое. Это условие также определяет область захвата – область существования синхронного режима. При этом разность между фазой внешнего сигнала и фазой подверженного воздействию осциллятора – фазовое рассогласование – есть постоянная величина, равная arcsin Δ, т. е. имеет место строгий фазовый захват.

В уравнении (6.9) при Δ = 1 происходит бифуркация слияния состояний равновесия [Zaks et al., 2000] и имеет место одно состояние равновесия с координатой $\bar{\theta} = \pi/2$. В области |Δ| > 1 состояний равновесия нет, и разность фаз растет неограниченно. Такой режим называется режимом биений. Характер нарастания разности фаз зависит от параметра Δ. Если |Δ| немного больше 1, то рост θ (t) представляет собой чередование сравнительно длинных участков практически не меняющейся разности фаз (соответствующие сохранению синхронного режима в течение некоторого времени) с короткими участками ее быстрого роста – скачками на 2π, которые называют фазовыми проскоками. Т. е. в этом случае рост фазы существенно неравномерен на различных временных интервалах. С ростом |Δ| длина интервалов почти постоянной фазы становится меньше и при достаточно большом его значении фаза растет практически равномерно.

Более детальный анализ увеличения фазы, которое видно на рис. 6.3, показал, что фаза волн с периодом 10.7 мин изменяется не равномерно, наблюдаются перескоки. С использованием натурных данных был установлен период перескока фазы, являющийся также периодом биений, равный примерно T_b = 2870 мин, тогда частота биений $\Omega_b = 2\pi/T_b$ = 0.00219 цикла в минуту. Согласно выражению [Осипов, Половинкин, 2005],

$$\Omega_b = \sqrt{\Delta^2 - 1} \qquad (6.10)$$

и для приведенной из эксперимента частоты биений параметр Δ = 1.0000024.

С учетом этих параметров выполнено численное решение дифференциального уравнения (6.9) относительно θ, график которого (рис. 6.4) показал, что при данной величине Δ фаза будет расти не линейно, а с перескоками, что и подтверждает взаимно спектральный анализ данных наблюдений.

Также был выполнен численный расчет осциллятора Ван дер Поля для полученных из натурных экспериментов параметров, описываемый системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\omega_0^2 x + \mu\,[(1-x^2)\,y + 2\varepsilon \sin \omega t]\,, \end{aligned} \qquad (6.11)$$

где ω_0 – частота колебаний и параметр нелинейности (вязкого трения системы) $\mu \geq 0$, управляющий формой колебаний.

Для расчетов использовались параметры, полученные из полевых наблюдений: ω_0 = 0.009926 рад / с, ω = 0.009787 рад / с, μ = 0.0005 Н с / м, ε = 0.012 Н (0.5 амплитуда силы внешнего осциллятора) и шаг интегрирования 1 с. Расчетный фазовый портрет (рис. 6.5) системы (6.11) показал, что в этом случае флуктуации осциллятора Ван дер Поля слабо нелинейны и близки к гармоническим, поэтому в его спектре мощности доминирует только одна собственная частота генератора ω.

Следует также отметить, что квазигармонический предельный цикл устойчив в поперечном направлении, так как возмущение амплитуды затухает [Осипов, Половинкин, 2005]. При движении в касательном направлении, то есть при изменении фазы, имеет место безразличное равновесие: нет ни устойчивости, ни неустойчивости. Поэтому фазе колебаний соответствует нулевой ляпуновский показатель, который характеризует состояние равновесия и фаза может легко управляться внешним воздействием, что является крайне важным при достижении синхронного режима [Ott, 2002].

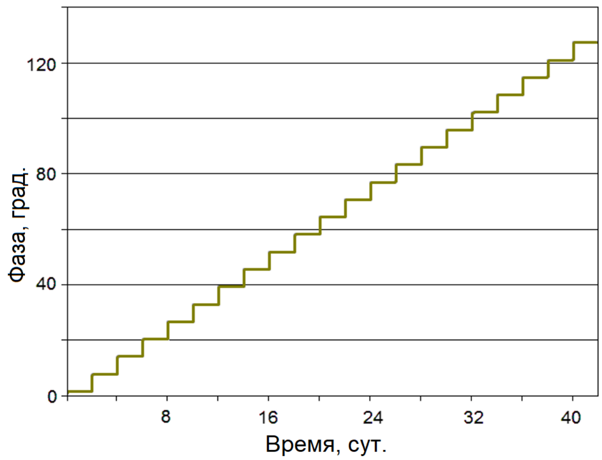


Рис. 6.4. Изменение фазы для модели Вандер Поля с частотой биений $\Omega_b = 2\pi / T_b = 0.00219$ циклов в минуту.

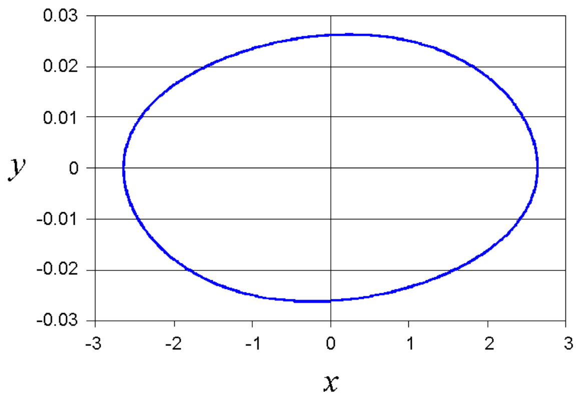


Рис. 6.5. Фазовый портрет для системы (6.11). Здесь использованы: $\omega_0 = 0.009926$ рад/с, $_{w=}$ 0.009787 рад/с, m = 0.0005 Н*с/м, ε = 0.012 Н.

6.5. Выводы

Одна из главных тенденций в живом мире – тенденция к достижению общих ритмов взаимного поведения – тенденция к синхронизации. С различными проявлениями синхронизации можно встретиться в физике, биологии, химии, технике, экономике, медицине и т. д. Возможна синхронизация как двух элементов, так и в ансамблях, состоящих из сотен и тысяч элементов. В данной монографии впервые рассмотрена синхронизация морской акватории приходящей краевой волной.

По результатам проведенных нами измерений волнения были обнаружены краевые волны с периодом около 10.7 с и рост фазы этих колебаний в течение всего периода наблюдений.

Для объяснения обнаруженного роста фазы рассмотрена модель Ван дер Поля, соответствующая случаю слабого и произвольного периодического воздействия на регулярную автоколебательную систему – осциллятор Ван дер

Поля. Численный расчет с использованием теоретической модели синхронизации и осциллятора Ван дер Поля для периода осциллятора 10.55 мин показал хорошее соответствие с экспериментальными данными. В рассматриваемом случае колебания осциллятора Ван дер Поля слабо-нелинейные и близки к гармоническим. Причем это единственная модель, объясняющая обнаруженное по натурным данным увеличение фазы.

Проведенные исследования показали, что в прибрежной зоне моря имеет место захват приходящих волн, в данной монографии – возбужденных ветром, резонансной системой (осциллятором) прибрежного рельефа. При этом происходит синхронизация частоты резонансной системы частотой приходящих волн и наблюдается неограниченный рост фазы с фазовыми перескоками с частотой биений.

Поскольку морская акватория с приходом волны на близкой к резонансной частоте акватории может усиливать эти колебания, как, например, на о. Шикотан [Рабинович, 1993] приходящие на вход бухты колебания усиливались в пять раз. Это может представлять опасность для проживающего на побережье населения.

ГЛАВА 7

Анализ особенностей колебаний на волнении пришвартованного судна

В статьях и книгах по устройству и эксплуатации судов, как, например, [Чайников, 1971; Ситченко, Ситченко, 1987; Жинкин, 2002] большое внимание уделяется мореходности судов и, в частности, при воздействии качки. Качка судна особенно опасна при близких значениях собственных колебаний судна и приходящих морских волн, если судно не обладает достаточной динамической остойчивостью, то это может привести к потере остойчивости и опрокидыванию судна.

Также опасна качка для пришвартованного судна. В некоторых случаях может происходить обрыв швартовых или повреждение корпуса судна о причал даже при наличии демпферов. Поэтому проводится анализ существующих систем швартовки численными моделями [Tompson et al., 1983; Thompson, Stewart, 2002], включающими как структурные, так и гидродинамические нелинейности, либо идеализированными численными или полуаналитическими моделями, в которых нелинейности аппроксимируются и частично описываются их линеаризованным или квазистатическим представлением.

В то же время, в численных и приближенных полуаналитических моделях совместимых морских структур и систем швартовки наблюдаются сложные нелинейные и хаотические реакции [Thompson, 1983; Papoulias, Bernitsas, 1988; Sharma et al., 1988; Bishop, Virgin, 1988; Bernitsas, Chung, 1990; Jiang, 1991]. Эти системы характеризуются нелинейной швартовой восстанавливающей силой и связанной гидродинамической возбуждающей силой.

Численное исследование динамических систем, обладающих нелинейными свойствами, выявило сложное поведение, включающее сосуществующие периодические и апериодические решения, определяемые различными начальными условиями. Устойчивость системы определяется сложными околорезонансными явлениями и чувствительностью к начальным условиям. Фундаментальным примером таких систем является гармонически возбужденное уравнение Дуффинга (Ueda, 1980a, b; Parlitz, Lauterborn, 1985).

Поведение нелинейных диссипативных динамических систем, подверженных детерминированному возбуждению, к которым относятся океанские причальные системы, широко изучалось как классическими, так и современными методами. Последние концентрируются на глобальных бифуркациях и обращаются к существованию хаотических решений и поведению глобальной системы [Guckenheimer, Holmes, 1986; Wiggins, 1990; Gottlieb, 1992].

Сравнение сложных явлений, полученных в результате качественного глобального квазистатического анализа одноточечных и двухточечных причальных систем [Bernitsas, Chung, 1990], показывает существование сходных особенностей и бифуркаций. Однако детальный бифуркационный анализ необходим для выделения и идентификации различных механизмов, управляющих устойчивостью системы.

Исследования систем швартовки стимулировались, в одной ситуации, экспериментами, проведенными нефтяной компанией на общем типе шарнирной причальной башни, которые выявили существование резонансов, приводящих к большим отклонениям. Эти башни, закрепленные на морском дне и стоящие вертикально благодаря плавучести, являются как бы перевернутыми маятниками, и пришвартованные к ним многотоннажные танкеры рассматриваются как неподвижные, в то время как башни колеблются морскими волнами. Это создает периодическое ослабление и жесткие рывки швартовых линий [Tompson et al., 1983; Thompson, Stewart, 2002].

В другой ситуации – в системах швартовки судна к монолитному причалу – также могут возникнуть нелинейные колебания, когда судно ударяется об упор и потом отскакивает от него, натягивая швартовые. Возникает динамическая система с так называемым ударным осциллятором, при котором компоненты колебательной системы сталкиваются с жестким концевым упором или друг с другом. Такие осцилляторы широко используются в разных моделях [Lee, 2005; Fang, Wickert, 1994; Cheng, Xu, 2006], в частности, описывающих колебания судна, ударяющегося о стену гавани [Thompson, 1983]. В таких исследованиях также применяется теория бифуркации для изучения устойчивости поведения системы при изменении параметров системы [Lee, Nandi, 1998; 2000].

Общая цель представленных исследований – изучение периодических и апериодических откликов нелинейных швартовых систем, подвергающихся возбуждению, индуцируемому детерминированными океанскими волнами. Поскольку причальные сооружения, суда и возбуждающее колебание судов морское волнение имеют отличия в параметрах от рассмотренных в работах [Thompson, 1983; Thompson, Stewart, 2002; Gottlieb, 1992], исследованы конкретные случаи динамических швартовых систем, возникающих при швартовке судов в основных портах Сахалинской области [Ковалев и др., 2020].

7.1. Экспериментальные данные

Для изучения условий швартовки и колебаний судна необходимо знать периоды воздействующих на судно морских волн и собственные периоды колебаний судна на морской поверхности. Определение периодов волн производилось с использованием спектров колебаний уровня в основных портовых бухтах о. Сахалин – городов Холмск и Корсаков. Карта района с пунктами наблюдений за волнением приведена на рис. 7.1.

Спектры рассчитывались по ранее полученным в 2008–2009 гг. записям колебаний уровня моря с секундной дискретностью, регистрируемых автономными регистраторами волнения АРВ-12, АРВ-14. Приборы устанавливались в портовых бухтах, что позволило определить периоды волнения, в том числе и собственных резонансных колебаний. Спектры, рассчитанные по четырехсуточным временным рядам, приведены на рис. 7.2.

Рис. 7.1. Карта района с пунктами наблюдений за волнением.

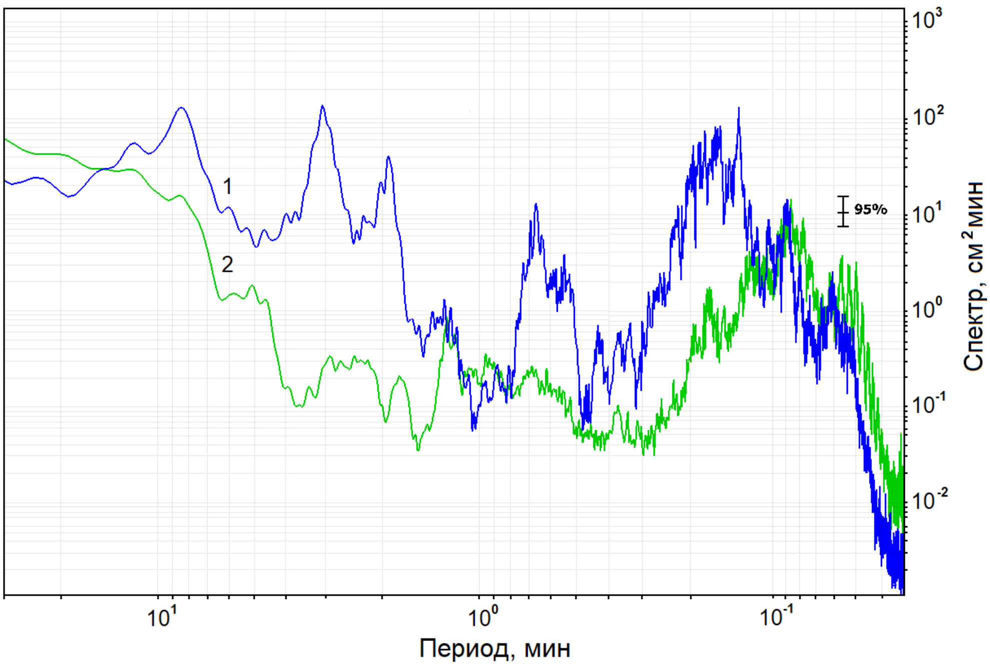


Рис. 7.2. Спектры колебаний уровня для трех пунктов наблюдения: 1 – Холмск, 2 – Корсаков.

Детальный анализ спектров, выполненный в программе Кима [Ковалев, 2018], показал наличие многочисленных пиков, соответствующих различным волновым процессам – ветровому волнению, зыби, инфрагравитационным волнам и собственным колебаниям акваторий. Периоды пиков сведены в таблицу 7.1.

Таблица 7.1.

Периоды волн в акваториях Корсакова и Холмска

Периоды волн в порту Корсакова, T (c)											
3-7.7	4.9	6.5	13.8	22.4	75.3	107.1	132.4				
Периоды волн в порту Холмска. T (c)											
5.4	8.5	11.6	13.7	15.8	21.1	25.7	31.2	39.6	114.8	184.0	480.0

Для рассматриваемой в дальнейшем модели швартовки необходимо знать периоды колебаний судов на поверхности моря, что по морской терминологии называется качкой. Были отобраны типичные суда, швартующиеся в рассматриваемых портах. Для порта Холмск был выбран паром «Сахалин-8», один из семейства трех аналогичных судов, работающих на линии Ванино-Холмск. В порту Корсакова обычно обрабатываются суда водоизмещением до 5000 тонн. Было выбрано судно теплоход «Игорь Фархутдинов», осуществляющий пассажирские перевозки на линии Корсаков – южные Курильские острова.

Для расчета периодов качки судна необходима метацентрическая высота судна. Эта высота измеряется между метацентром и центром тяжести судна. Она является мерой начальной остойчивости судна, определяющей восстанавливающие моменты при малых углах крена или дифферента. Однако в технических характеристиках судов ее значение не приводится. Поэтому были взяты приближенные значения метацентрической высоты, приведенные в [http://www.transportgood.ru/tgos-623-1.html] для рассматриваемых типов судов.

Собственные периоды различных видов качки судов с учетом допущений и упрощения формул определяются по следующим выражениям [Жинкин, 2002]:

$$T_\theta = cB/\sqrt{h} \qquad \text{для бортовой качки,} \qquad (7.1)$$

$$T_\psi \approx T_\varsigma \approx 2.4\sqrt{d} \qquad \text{для килевой и вертикальной качки,} \qquad (7.2)$$

где B – ширина судна, d – осадка судна, c – инерционный коэффициент судна, обычно лежит в пределах 0.74–0.8 с/м$^{1/2}$ [Чайников, 1971], h – метацентрическая высота судна. Основные параметры судов, а также рассчитанные периоды качки с использованием (7.1, 7.2) приведены в таблице 7.2.

Выше были определены периоды качки на случай тихой воды, которые отличаются от качки при регулярном волнении. Кораблестроители считают [https://sea-man.org/kachka-sudna.html], что при регулярном волнении собственные колебания судна быстро затухают вследствие влияния сопротивления воды, и колебания судна по истечении некоторого времени становятся чисто вынужденными.

Амплитуда вынужденных колебаний при бортовой качке без учета сопротивления воды, согласно выводам линейной теории качки, может быть вычислена по формуле [https://sea-man.org/kachka-sudna.html]:

$$\theta_m=\alpha_0\cdot(1/(1- T_\theta^2/\tau^2)) \text{ или } \theta_m/\alpha_0= \cdot 1/(1- T_\theta^2/\tau^2) \qquad (7.3)$$

где θ_m – амплитуда качки; α_0 – наибольший угол волнового склона; T_θ – период собственных колебании судна; τ – период волны. Анализ уравнения (7.3) показывает, что при приближении периода волн к периоду собственных колебаний судна T_θ амплитуда вынужденных колебаний судна возрастает и в случае малого сопротивления воды может достигать большой величины.

Таблица 7.2.

Основные параметры судов и порты их швартовки

Тип судна	Ширина по ватерлинии/ длина (м)	Метацентрическая высота (м)		Периоды боковой качки судна (с)		Водоизмещение (т)	Дедвейт (т)	Осадка (м)	T_ψ(с)	Порт швартовки
		h min	*h* max	T_θ min	T_θ max					
Паром «Сахалин 8»	20.08/ 127.3	0.4	1.5	13.1	25.4	8530	2400	6.6	6.2	Холмск
Теплоход «Игорь Фархутдинов»	17.2/ 89.98	1	1.8	10.3	13.8	3962	815	5.3	5.5	Корсаков

Известно [https://sea-man.org/kachka-sudna.html], что влияние сопротивления воды на относительную амплитуду вынужденных колебаний значительно лишь для интервала отношения периодов $0.70 < T_\theta/\tau < 1.3$. И в этом случае бортовая качка наиболее опасна, особенно если судно не обладает достаточной динамической остойчивостью, то может произойти потеря остойчивости и в конечном итоге опрокидывание судна. Рассматриваемый случай качки, как отмечается в работе [https://sea-man.org/kachka-sudna.html], является наиболее опасным.

Учитывая, что реальное морское волнение является нерегулярным и его можно рассматривать как стационарный случайный процесс [Жинкин, 2002], а также опасность качки на периодах, близких к периодам приходящих морских волн, представляет интерес рассмотреть модель динамической системы, в которой, приходящие морские волны раскачивают судно при бортовой качке.

7.2. Математическая модель колебаний судна

В работах Томпсона, в том числе и с соавторами [Thompson, 1983; Thompson, Ghaflari, 1983; Thompson et al., 1984; Thompson, Stewart, 2002], а так же и в статьях других авторов для описания колебания заякоренного судна или стоящего у причала обычно используется дифференциальное уравнение второго порядка с внешним возбуждающим воздействием. Другие исследователи при рассмотрении хаотического движения судов у причала, как, например, [van Oortmerssen, 1976; Gottlieb, 1992], используют хорошо известное уравнение Дуффинга. Следует заметить, что авторы данной монографии проверяли оба варианта и пришли к выводу, что при моделировании уравнением Дуффинга в фазовых портретах динамической системы просматриваются две потенциальные ямы, в то время как в численных экспериментах других авторов [Lee, 2005], при переходе к режиму ударного осциллятора, они не наблюдаются.

Следует также отметить работы отечественных исследователей [Леонтьев и др., 2013; Семенов и др., 2015], в которых рассмотрен другой подход к этой проблеме. В перечисленных статьях рассмотрена задача о колебаниях судна, стоящего у причала на волнении. Судно схематизировано цилиндрическим телом неограниченной протяженности прямоугольного поперечного сечения, а набегающие из бесконечности волны описываются потенциалом скорости. Данный подход представляется интересным, и авторы настоящей монографии собираются его использовать в дальнейшей работе.

Ниже рассмотрим модель, описывающую динамику диссипативного осциллятора массой m с коэффициентом вязкого демпфирования c (параметром диссипации), амплитудой внешнего воздействия F и частотой ω и две жесткости k_1 и k_2 для положительного и отрицательного смещения судна соответственно. Такой осциллятор в зарубежной литературе часто называют «билинейный осциллятор», так как эта динамическая система перемещается с различными жесткостями для положительных и отрицательных отклонений. Для моделирования будем использовать уравнение гармонического осциллятора с затуханием под воздействием внешней гармонической силы – морского волнения. По аналогии с [Thompson, 1983] такое уравнение движения для перемещения x в моменты времени t запишем в виде:

$$m\ddot{x} + 2c\dot{x} + px = F \sin \omega t \quad \text{при} \quad \begin{aligned} &p = k_1 \text{ для } x > 0 \\ &p = k_2 \text{ для } x < 0. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Здесь x – динамическая переменная, описывающая состояние системы, являющаяся обобщенной координатой перемещения, и дифференцирование производится по t.

Уравнение (7.4) используется здесь для описания колебаний судна с двухточечной швартовкой, т. е. удерживаемого двумя разнонаправленными швартовыми линиями с жесткостью k_1 и k_2. В пределе, когда $\alpha = k_2/k_1$ становится бесконечным, получается «ударный осциллятор» [Thompson, Ghaflari, 1983], т. е. когда судно будет ударяться об отбойники (демпферы) причала. Периодический ударный резонанс для моментов, описываемых этим уравнением, возникает при частоте возбуждения $\omega = 2\omega_0$, где $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ частота колебаний системы (корпуса судна) на волнении [Lee, 2005].

Для удобства моделирования с целью иметь возможность изменять частоту колебаний системы воспользуемся тем, что $p/m = k/m = \omega^2_0$. Тогда (7.4) перепишем в следующем виде:

$$\ddot{x} + 2\frac{c}{m}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m} sin\omega t \qquad p = k_1 \text{ для } x > 0$$
$$p = k_2 \text{ для } x < 0 \ . \qquad (7.5)$$

Для упрощения алгоритма программы моделирования понижаем порядок уравнения (7.5) с использованием задачи Коши [Бугров, Никольский, 2004]:

$$\dot{x_1} = x_2$$
$$\dot{x_2} = -2\frac{c}{m}x_2 - \omega_0^2 x + \frac{F}{m} sin\omega t \quad p = k_1 \text{ для } x > 0$$
$$p = k_2 \text{ для } x < 0 \ . \qquad (7.6)$$

Для предложенной системы уравнений в редакторе Microsoft Excel была составлена программа вычисления зависимости $x(t)$ и фазового портрета динамической системы, описываемого (7.6). При этом изменение скорости моделируется как $\dot{x}$ (t+) = – $r\dot{x}$ (t-), где r − коэффициент реституции, (t+) – время после удара и (t-) – время до удара. С использованием программы были вычислены зависимости $x(t)$ и фазового портрета для разных параметров динамической системы, входящих в (7.6) как для случаев двухточечной швартовки, так и для случаев ударов судна о демпфирующие устройства.

7.3. Анализ и обсуждение результатов

Анализ начнем с порта г. Холмск для парома «Сахалин-8». Фазовый портрет такой динамической системы для случая двуточечной швартовки без удара в причал при одинаковой жесткости швартовых, нормированном коэффициенте вязкого демпфирования c/m=0.01 и реально наблюдаемого волнения моря с периодами около 25.7, периодами качки самого судна 25.4 с и нормированной амплитудой воздействия волнения F/m=1 показан на рис. 7.3*а*. Ввиду близости периодов колебаний здесь следует ожидать некоторого резонанса для режима колебаний системы без удара [Ловецкий, Севастьянов, 2007].

Видно, что после прихода волн колебания динамической системы без удара о демпферы постепенно приходят к предельному циклу. Такой процесс установления колебаний характерен для динамической системы, описываемой дифференциальным уравнением второго порядка, время установления $t \sim c/m^{-1}$ [Ловецкий, Севастьянов, 2007]. И после начала действия волнения в системе устанавливаются вынужденные колебания с амплитудой A и фазой ψ определяемых выражениями:

$$A(\omega) = \frac{F}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4(\frac{c}{m})^2\omega^2}}, \qquad (7.7)$$

$$\cos\Psi = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4(\frac{c}{m})^2\omega^2}}. \qquad (7.8)$$

Если резонансная система обладает большой добротностью, то ширина резонансной кривой на уровне $A/A_m = 1/\sqrt{2}$ равна $2c/m$ и точно в резонансе амплитуда колебаний $A_m = F_0/(2\omega_0 c/m)$ [Трубецков, Рожнёв, 2001].

Для случая режима ударных колебаний вид фазового портрета существенно изменяется (рис. 7.3*б*). Вначале наблюдается отскок большой амплитуды и удар о демпферы, потом прилипание и отскок от демпфера меньшей амплитуды, удар, затем отскоки и удары немного большей амплитуды с постепенным переходом к предельному циклу. И в этом случае, как следует из формы колебаний системы и фазового портрета, колебания динамической системы ударного осциллятора нелинейны.

При уменьшении амплитуды волнения до $F/m = 0.1$ характер колебаний существенно не изменяется для обоих режимов динамической системы, за исключением уменьшения амплитуды ее колебаний.

Увеличение коэффициента вязкого демпфирования до c/m = 0.1 показывает (рис. 7.3*в*), что в безударном режиме наблюдается более быстрый переход системы к колебаниям по предельному циклу, чего и следовало ожидать. Для режима ударного осциллятора (рис. 7.3*г*) в системе наблюдается отскок и удар несколько большей амплитуды, чем последующие и затем переход колебаний к предельному циклу.

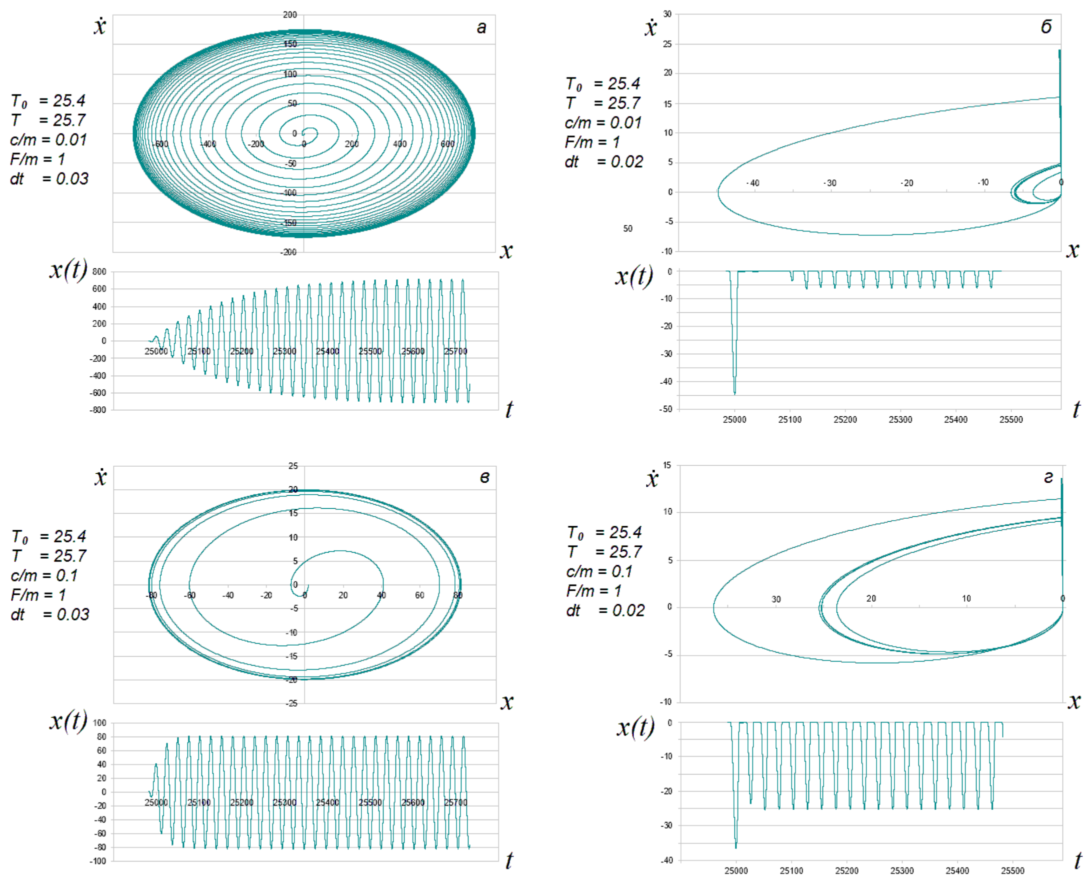


Рис. 7.3. Фазовые портреты и форма колебаний динамической системы в порту Холмск для случая без удара (*а*, *в*) и для ударного осциллятора (*б*, *г*) при волнении с периодом 25.7 с. Периоды колебаний и dt – шаг интегрирования в секундах.

Поскольку, как показано в [Thompson, Ghaflari, 1983; Lee, 2005], периодический ударный резонанс для моментов, описываемых уравнением (7.4), возникает при частоте возбуждения $\omega = 2\omega_0$, был выполнен расчет фазовых портретов системы для волнения моря с периодами около 12.7 с и периодами качки самого судна 25.4 с, амплитудой волнения $F/m = 1$ и коэффициентами вязкого демпфирования $c/m = 0.01$ и $c/m = 1$. Фазовые портреты для этого случая приведены на рис. 7.4.

По графику колебаний динамической системы (рис. 7.4*а*) с $c/m = 0.01$ видно, что морские волны с более короткими периодами, отличающимися в два раза, «затягивают» периоды колебаний судна и в результате система начинает колебаться с периодом волн. Фазовый портрет для безударного режима колебаний при этом стремится к предельному циклу колебаний. Отметим, что в работе [Бекман, 2010] динамическую систему с похожим фазовым портретом относят к хаотической. Также видно, что амплитуды колебаний системы в этом случае примерно на полтора порядка меньше по сравнению с приведенными на рис. 7.3*а*.

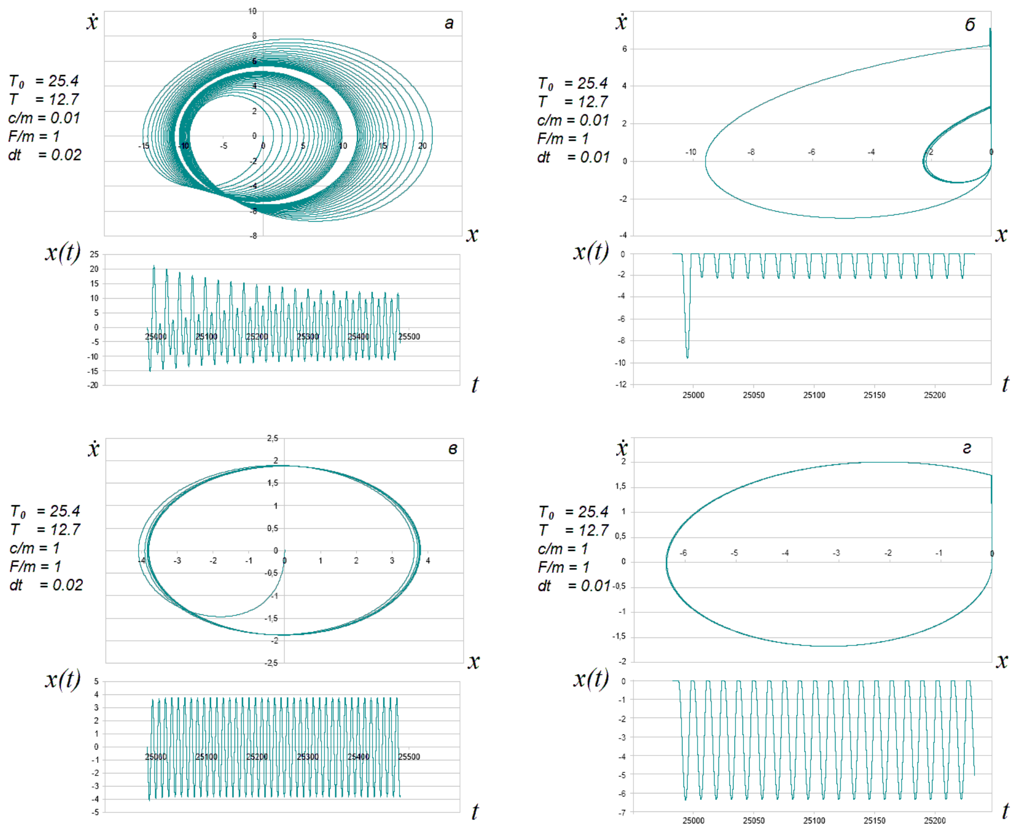


Рис. 7.4. Фазовые портреты и форма колебаний динамической системы в порту Холмск для случая без удара (*а*, *в*) и для ударного осциллятора (*б*, *г*) при волнении с периодом 12.7 с, периодом качки судна 25.4 с, амплитудой волнения $F/m = 1$ для разных значений коэффициентов вязкого демпфирования $c/m = 0.01$ и $c/m = 1$ и dt – шаг интегрирования в секундах.

Для режима ударного осциллятора (рис. 7.4*б*) на фазовом портрете первоначально наблюдается сильный отскок, удар, затем отскок и удар меньшей амплитуды и далее такие же по величине отскоки и удары, картина близкая к выше рассмотренному случаю (рис. 7.3*б*), но амплитуда отскока примерно в 2.5 раза меньше.

При очень значительном увеличение коэффициента вязкого демпфирования до $c/m = 1$ картина изменяется (рис. 7.4*в*). Колебания системы сразу происходят на периодах морских волн. И на фазовом портрете ударного режима наблюдаются отскоки и удары большей амплитуды, которая не изменяется со временем.

Следует отметить, что периодический ударный резонанс при частоте возбуждения $\omega = 2\omega_0$ рассмотрен выше условно, поскольку в Холмской бухте волнение с такими периодами не наблюдается (табл. 7.1). В то же время имеются волны с близкими периодами – 11.6 и 13.7 с. Но поскольку очень значимых отличий в фазовых портретах для разных рассчитанных периодов колебаний не наблюдается, то и на этих периодах не следует ожидать каких-либо существенных отличий, что и было подтверждено проверочным расчетом. Использование при расчете фазовых портретов и формы колебаний разных шагов интегрирования dt обусловлено лучшим отображением изменения формы колебаний динамической системы.

Также был проведен анализ перемещений судна для случая воздействия на него длинных волн. При периодах волн, превышающих периоды собственных колебаний судна примерно в два раза, фазовый портрет представляет квазипериодический тор с разрывом, характерный для бифуркации Хопфа к хаотическому поведению модели в нерезонансных и слабых резонансных случаях [Cheng, 2006]. Такой случай будет рассмотрен ниже на примере теплохода «Игорь Фархутдинов».

Анализ воздействия более длинных волн с минутными периодами, являющимися модами собственных колебаний Холмской бухты (рис. 7.5), показал, что для периодов волн 3.1 и 8 мин фазовые портреты для случая безударных колебаний динамической системы близки по виду к тору без разрыва, а ударного осциллятора похожи и, в отличие от ранее рассмотренных, представляют движения вдоль оси x, т. е. судно будет двигаться практически перпендикулярно к причалу без перемещений вдоль него, движение судна в этом режиме состоит из группы трех затухающих отскоков и ударов. При этом увеличение коэффициентов вязкого демпфирования c/m приводит к сокращению времени между такими группами.

Рассмотрим ситуацию в порту г. Корсаков с судном меньшего водоизмещения теплоходом «Игорь Фархутдинов». Максимально возможные периоды боковой качки у него 13.8 с и почти равны периодам волн 13.7 с в порту Корсаков. Рассчитанные фазовые портреты и форма колебаний динамической системы для этого случая без удара и для ударного осциллятора оказались почти подобным приведенным на рис. 7.3 для парома «Сахалин-8». Поэтому рассмотрим случай, когда возможен периодический ударный резонанс при частоте возбуждения $\omega = 2\omega_0$, фазовые портреты и форма колебаний для которого представлены на рис. 7.6*а*, *б*.

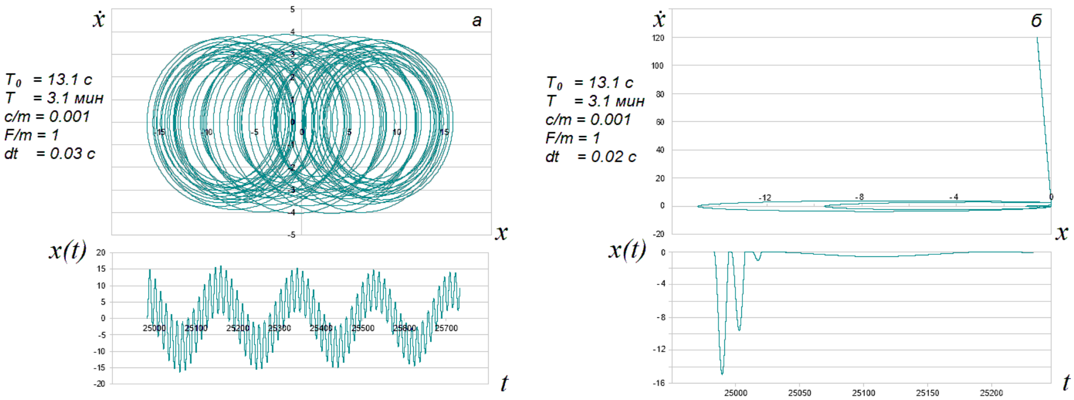


Рис. 7.5. Фазовые портреты и форма колебаний динамической системы в порту Холмск для случая без удара (*а*) и для ударного осциллятора (*б*).

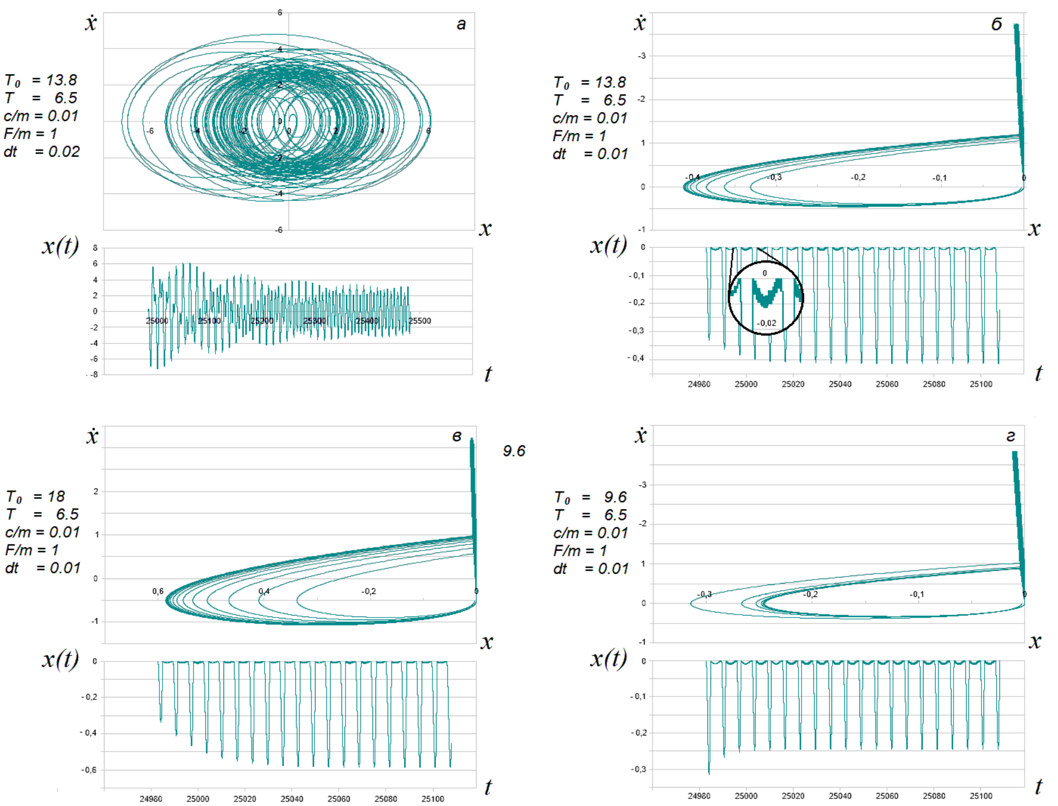


Рис. 7.6. Фазовые портреты и форма колебаний динамической системы в порту Корсаков для случая без удара (*а*) и для ударного осциллятора (*в*, *б*, *г*). Периоды колебаний и *dt* – шаг интегрирования, в секундах.

Как следует из фазового портрета и формы колебаний (рис. 7.6*а*), и сравнения с аналогичными (рис. 7.4*а*) для судна существенно большего водоизмещения, теплоход «Игорь Фархутдинов» при безударных о причал колебаниях будет хаотически раскачиваться на волнении, и предельный цикл колебаний динамической системы в этом случае не так хорошо выражен. В случае ударного осциллятора (рис. 7.6*б*) вначале наблюдается отскок и затем удар с последующим дребезгом (выделен фрагментом на рис. 7.6*б*), после чего некоторое и непродолжительное возрастание по амплитуде отскоков и ударов с переходом к предельному циклу.

Представляет интерес зависимость параметров колебаний системы от жесткости швартовых канатов. Поскольку $p/m = k/m = \omega^2_0$, изменение ω^2_0 эквивалентно изменению жесткости, были рассчитаны фазовые портреты для выше рассмотренного периода волнения $T = 6.5$ с и разных значений T_0. В случае безударных колебаний системы, фазовые портреты существенно не отличались от приведенного на рис. 7.6*а*, за исключением более четко выраженного предельного цикла.

Для режима ударного осциллятора увеличение жесткости швартовых линий (T_0=18 с) приводит к увеличению амплитуды повторных ударов (рис. 7.6*в*), а уменьшение жесткости (T_0 = 9.6 с) уменьшает амплитуду ударов почти в 2 раза в рассматриваемом случае и увеличивает амплитуду дребезга (рис. 7.6*г*). Отсюда следует, что необходимо снижать жесткость швартовых. Однако предел снижения требует отдельного изучения. Так, при $T_0 < 6.5$ с уменьшения амплитуды первого и последующих отскоков и ударов не происходит, но увеличивается амплитуда дребезга.

Также было выполнено моделирование динамической системы для ситуаций, когда периоды волнения примерно в два раза больше, чем периоды колебаний судна. Для моделирования использовались период волн 22.4 с и судна 10.3 с. Рассчитанные фазовый портрет и отображения Пуанкаре (рис. 7.7) соответствуют бифуркации Хопфа для хаотического движения в нерезонансных и слабых резонансных системах [Cheng, 2006], при которой фазовый портрет представляет квазипериодический тор и квазипериодический тор с разрывом.

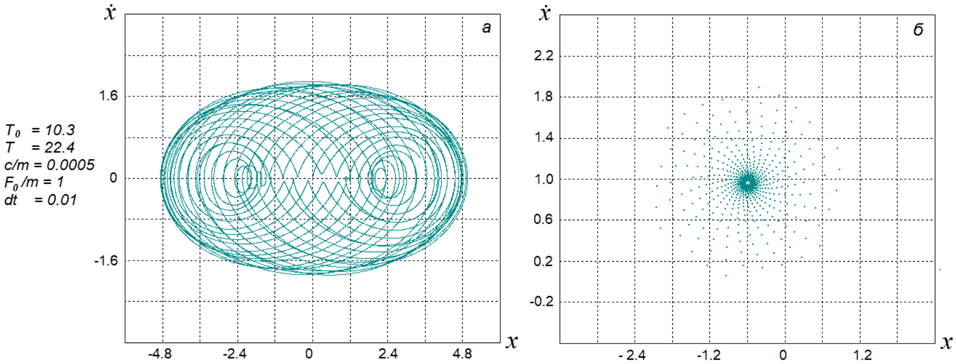


Рис. 7.7. Фазовый портрет динамической системы (*а*) и отображение Пуанкаре в порту Корсаков для периодов волнения 22.4 с и периодов собственных колебаний судна 10.3 с.

Отметим, что бифуркацией Хопфа называется переход от неустойчивой точки к устойчивому предельному циклу. Такое рождение колебаний является мягким, поскольку происходит при малых значениях параметра амплитуды волнения и вязкости и предельный цикл имеет очень малую амплитуду колебаний. В то же время, малые возмущения могут привести к большим эффектам. Когда значение T смещается все дальше от значения бифуркации Хопфа, инвариантный круг в проекционных сечениях Пуанкаре заметно расширяется и попадает в периодический аттрактор более высокого периода. Впоследствии система становится нестабильной и хаотичной [Cheng, 2006].

7.4. Выводы

В главе рассмотрены результаты исследований особенностей колебаний пришвартованного к причалу судна для двух основных портов Сахалинской области – Холмска и Корсакова, поскольку качка судна у причала может представлять опасность и приводить к повреждению судна или швартовых линий.

С использованием натурных данных по волнению, полученных в портовых бухтах, рассчитаны спектры колебаний уровня и определены периоды существующих там волновых процессов для диапазона периодов от 2 с до 30 мин. Показано, что собственные колебания портовых бухт имеют очень широкий диапазон периодов: характерные периоды волн для Холмского порта от 5.4 до 480 с, порта в Корсакове от 3 до 132.4 с.

С учетом существующих методов выполнен расчет собственных периодов качки двух разных типов судов и тоннажа, преимущественно швартующихся в портах: парома «Сахалин-8» в порту г. Холмск, теплохода «Игорь Фархутдинов» в порту г. Корсаков. Показано, что бортовая качка является наиболее опасной для пришвартованных судов.

Полученные данные периодов волнения в портовых бухтах и периодов качки судов позволили выполнить моделирование движения судов при волнении – колебаний динамической системы, для случаев удара судна о демпферы и без удара, с использованием дифференциального уравнения второго порядка с внешним возбуждающим воздействием. Для численного моделирования выполнено понижение порядка уравнения с использованием теоремы Коши.

Рассчитаны фазовые портреты и формы колебаний динамической системы в порту Холмск для разных коэффициентов вязкого демпфирования реально наблюдаемого волнения моря с периодами около 25.7 с и периодами качки самого судна 25.4 с; после прихода волн для случая движений без удара о демпферы колебания динамической системы постепенно приходят к предельному циклу. Для режима ударных колебаний вначале наблюдается сильный отскок и удар о демпфер, затем непродолжительное прилипание, и далее следуют отскоки и удары меньшей амплитуды.

При уменьшении амплитуды волнения характер колебаний существенно не изменяется для обоих режимов динамической системы, за исключением уменьшения амплитуды ее колебаний. Увеличение коэффициента вязкого демпфирования в безударном режиме приводит к более быстрому переходу системы к колебаниям по предельному циклу, а в режиме ударного осциллятора в системе наблюдается отскок и удар несколько большей амплитуды, чем последующие.

Выполнена проверка о возможном переходе динамической системы к периодическому ударному резонансу при периодах возбуждения в два раза меньших периодов качки, предсказанному в [Thompson, Ghaflari, 1983; Lee, 2005]. Установлено, что в этом случае морские волны с более короткими периодами, отличающимися в два раза, «затягивают» периоды колебаний судна и в результате система начинает колебаться с периодом приходящих волн.

Анализ воздействия более длинных волн с периодами 3.1 и 8 мин, являющимися модами собственных колебаний Холмской бухты, показал, что для случая ударного осциллятора, в отличие от ранее рассмотренных, судно будет двигаться практически перпендикулярно к причалу без перемещений вдоль него.

Моделирование колебаний для судна меньшего водоизмещения – теплохода «Игорь Фархутдинов» в порту Корсаков для периодов волнения меньших, чем периоды качки судна, показало, что фазовые портреты и форма колебаний динамической системы для случаев без удара и для ударного осциллятора оказались почти подобным как и для парома «Сахалин-8».

Анализ зависимости параметров колебаний системы от жесткости швартовых канатов выявил, что для случая безударных колебаний характер колебаний не изменяется при изменении жесткости. Для режима ударного осциллятора увеличение жесткости швартовых линий приводит к увеличению амплитуды повторных ударов.

Моделирование динамической системы для ситуаций, когда периоды волнения больше чем в два раза периодов колебаний судна, показало, что фазовый портрет и отображения Пуанкаре соответствуют бифуркации Хопфа для хаотического движения в нерезонансных и слабых резонансных системах, при которых фазовый портрет представляет квазипериодический тор и квазипериодический тор с разрывом. Увеличение периодов волнения дальше от значения бифуркации Хопфа может привести к нестабильности и хаотичным движениям динамической системы. Это может произойти в случае прихода в район порта Корсаков длинноволновой зыби и генерации в этом районе инфрагравитационных волн с периодами более 2 мин, которые при проведении нами наблюдений обнаружены не были, возможно из-за не круглогодичного наблюдения.

Моделирование подтвердило богатую динамику выше рассмотренных динамических швартовых систем. В режиме ударного осциллятора наблюдаются нелинейные колебания динамической системы. Важную роль в динамике системы играет параметр демпфирования, а также соотношение периодов внешнего возбуждения – морских волн и периодов собственных колебаний судна. При этом, даже при малых значениях параметров амплитуды волнения и вязкости, малые возмущения могут привести к большим эффектам [Cheng, 2006].

ГЛАВА 8

Программы для численного моделирования динамических систем

Существуют программные системы (пакеты), которые позволяют моделировать динамические системы, вычислять фазовые портреты, отображения Пуанкаре и бифуркационные диаграммы [Эдвардс, Пенни, 2016]. К таким пакетам можно отнести, например, Mathematica компании Wolfram. Система Mathematica основывается на инновационном языке Wolfram Language и в Mathematica 12 присутствуют теперь почти 6000 функций наряду с большим количеством важных новых идей, которые значительно расширяют видение и охват системы.

Поскольку описывается математическая среда, в первую очередь надо рассказать о ее вычислительных способностях и диапазоне решаемых задач: Mathematica содержит наибольшую в мире коллекцию высокооптимизированных алгоритмов, заключенных в одной системе, многие из которых были открыты при Wolfram Research. Сочетание эффективности JIT (компиляции на лету) и автоматически конфигурируемых параллельных вычислений гарантирует корректность ответов и высокую скорость их получения.

Система поддерживает числа любой точности, причем для внутренних расчетов часто используются еще более точные значения для повышения качества результата. Также, для повышения точности среда использует символьные вычисления, т. е. пытается упростить или преобразовать выражение, и лишь затем производит численный расчет. При этом алгоритм решения выбирается автоматически из тысяч методов и может быть изменен даже в процессе вычисления, что ускоряет получение решения и повышает точность больше, чем ручное задание метода (что, однако, не запрещено).

В то же время, для выполнения быстрых расчетов зачастую требуется более простые в использовании специализированные программы, предназначенные исключительно для моделирования динамических систем. Поэтому нами был разработан ряд прикладных программ, в том числе и в среде Microsoft Excel.

8.1. Программа PUAN

Данная программа предназначена для изучения процесса возбуждения и развития нелинейных колебаний материальной точки в системе, описываемой уравнением Дуффинга. Последняя модификация программы позволяет моделировать систему, описываемую уравнением Ван дер Поля. Программа написана на языке программирования Delphi и может работать с операционными системами Windows 7, Windows 10.

С ее помощью численное моделирование может производится тремя различными способами – путем изучения смещения x в зависимости от времени, т. е. в виде функции $x(t)$; анализа движения точки на фазовой плоскости, на которой представлена эволюция ее движения как функция скорости точки v от величины ее смещения x, т. е. в виде $v(x)$; и, наконец, с помощью отображения Пуанкаре, которое формируется из отдельных точек фазового портрета колебания, соответствующих моментам одной и той же фазы периодической силы возбуждения.

После запуска программы появится окно как на рис. 8.1 и автоматически устанавливается режим вывода формы колебаний X(t), возникающих в соответствии с уравнением, которое записано в верхней левой части окна. Его ω и ω_o частоты вычисляются через периоды T и T_0, что удобно, поскольку океанологи в России часто оперируют с периодами волн. Кроме того, знак перед T_0 определяет знак соответствующего слагаемого.

Все органы управления программой размещены в левой стороне. Верхние пять окон предназначены для ввода значений коэффициентов уравнения Дуффинга, над которыми и размещен текст самого уравнения. Кроме того, знак перед T_0 определяет знак соответствующего слагаемого.

Все числовые параметры приведены в верхних 10-ти маленьких окнах. Эти параметры можно устанавливать произвольно. При вводе десятичных дробей в зависимости от настроек ПК необходимо учитывать разделитель (в рассматриваемом здесь случае это запятая), в противном случае программа будет зависать. При численном решении уравнения при заданных начальных условиях X_0, V_0 начало счета всегда производится от 0 и до момента t2. Но вывод информации на экран будет производиться лишь в интервале от t1 до t2. Это позволяет выводить на экран нужные участки графиков в удобном масштабе. В этих окнах, окрашенных в кремовый цвет, возможность изменения информации непосредственным вводом заблокирована, она изменяется через вспомогательные процедуры.

Выбор способа представления рассчитанной информации производится тремя переключателями: X(t), V(X) и Puan. Для каждого их них устанавливается своя координатная сетка через свой набор параметров по вертикальным и горизонтальным осям. В частности, для полученной картинки по вертикальной оси X приведено ее начальное значение X1=0.2, величина одного деления dt= 0.04 и их число nt=10. Аналогичным образом приведены параметры для горизонтальной оси времени t, причем вывод информации на экран будет начинаться с момента t1=1 по t2=t1+dt*nt=3. Эти числа сохраняются в двух защищенных окнах, о которых шла речь ранее. В заголовке формы приводятся экстремальные значения по величинам X и V, что позволяет как здесь, так и в других режимах устанавливать нужные масштабы по осям.

В режиме X(t) можно изменять параметры времени для получения информации о большем количестве колебаний. Установив t1=0, цену деления dt=30, nd оставив прежним, получим максимальное значение шкалы t2 равным 300. После нажатия кнопки «старт» внесенные изменения приведут к изменению картинки, в том числе и в заблокированных окнах кремового цвета. На этом же временном интервале можно посмотреть фазовый портрет колебаний V(X). Для этого нужно выбрать переключателем нужный режим и нажать кнопку «старт».

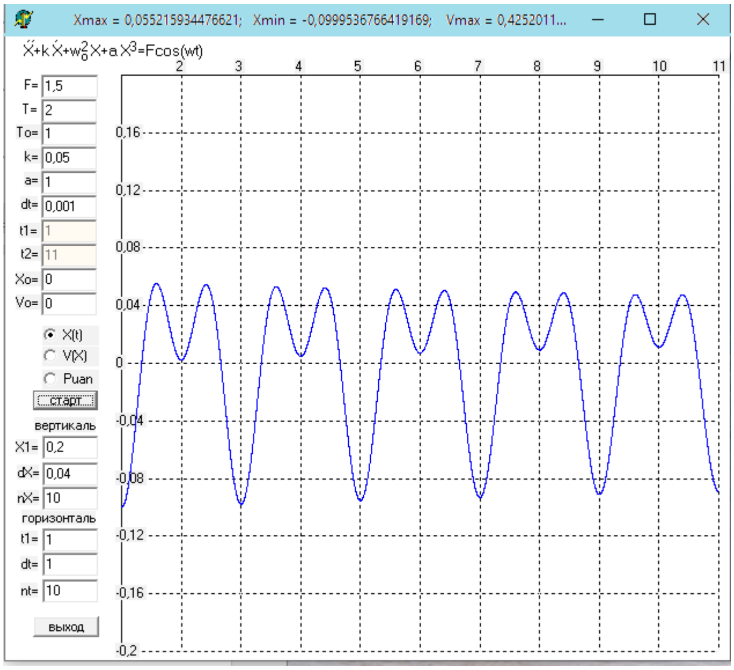


Рис. 8.1. Окно программы Puan в режиме X(t), форма колебаний.

В предложенных манипуляциях вычисления проводились довольно быстро при dt=0,001, что дает 1000 точек на секунду. Но если для повышения точности расчета и на больших промежутках времени шаг интегрирования уменьшить, например до dt=0,000001, то время вычислений становится очень заметной величиной. Для ориентировки длительности хода вычислений в заголовке экрана выводится строчка из «*», длина которой пропорциональна затраченному времени. Расчет оканчивается при 11 звездочках.

Внешний вид окна программы при исследовании хаотических колебаний через отображение Пуанкаре представлен на рис. 8.2. Для отображения Пуанкаре, которое выводит из каждого колебания только одну точку с координатами X,V в моменты когда ωt силы возбуждения кратно 2π, необходимо установить переключатель Puan и нажать «старт». Если в окне программы ничего не появляется, это может говорить о том, что изображение находится не в открытых в окне координатах и в этом случае необходимо увеличить размер окна отображения с помощью окон V и X.

Из содержания окон ввода следует, что численное интегрирование уравнения в этом варианте вычисления проведено с шагом 0,01 с и нулевыми начальными условиями, причем в виде графика будет выведена информация, соответствующая расчету от 0 до 30000 с. Окна t1 и t2 являются информационными и возможность непосредственного ввода в них заблокирована.

Необходимо обратить внимание, что dt = 0,01 (шаг интегрирования), т. е. рассчитывается 100 точек на секунду и это 200 точек на период. Но для длительных и точных расчетов этого мало. При времени 25000 с это дает 2.5 млн точек, что осуществляется вводом в ячейку dt соответствующего числа точек (в режиме X(t)), которое при выборе режима Puan будет отображаться в окне t2. Следует отметить, что при увеличении времени более 30000, программа будет долго производить вычисления и может зависнуть.

Программа предусматривает, что за счет изменения координат области отображения производится выделение ее части. Это соответствует увеличению данного фрагмента. Например, внутрь выделенного круга (рис. 8.3) снизу входят две ветви отображения. Подозрительной на бифуркации является нижняя ветвь, которая в этой зоне разбивается на большое число новых ветвей. В этой области вероятно и есть зона нескольких из них. Для их уверенной диагностики можно увеличить эту зону. Однако в случае низкого разрешения отображения – мало точек – это не поможет.

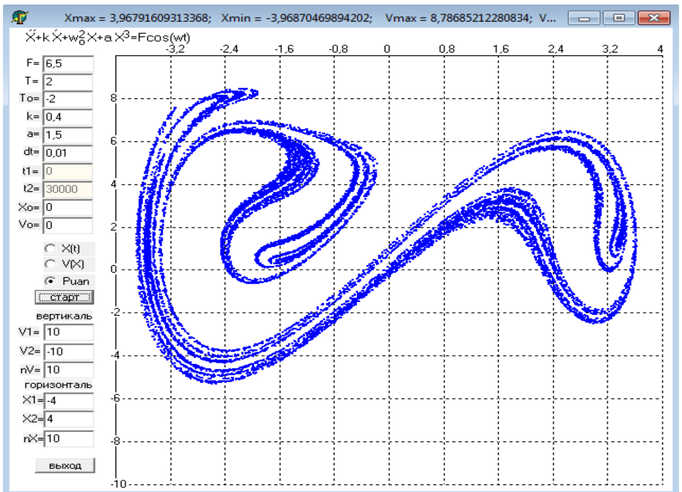


Рис. 8.2. Вид окна работающей программы при вычислении отображения Пуанкаре.

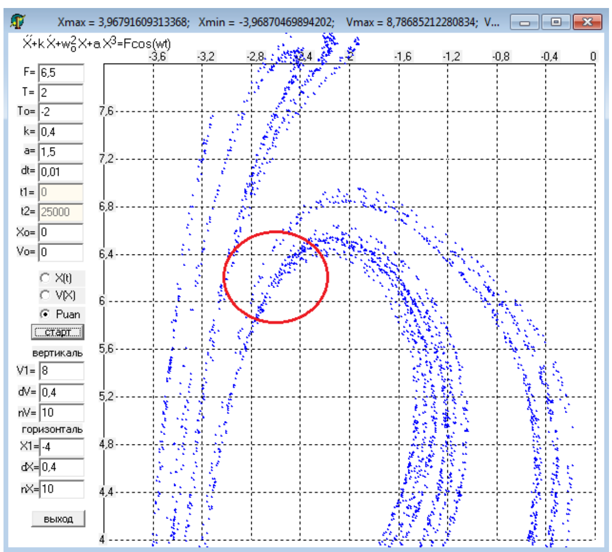


Рис. 8.3. Пример увеличения фрагмента отображения Пуанкаре.

Рассмотренная программа использовалась авторами для моделирования динамических систем, описываемых уравнениями Дуффинга и Ван дер Поля и построения графика колебаний и отображений Пуанкаре.

8.2. Моделирование в среде Excel

Наряду с рассмотренной выше программой для моделирования поведения динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями, авторы использовали легкодоступную и программируемую прикладную программу ОС Windows – редактор Excel.

Преимущество его использования заключается в быстром и наглядном представлении результата расчета при изменении параметров, а также возможности легкого изменения типа дифференциального уравнения. Excel использовался авторами для моделирования качки судна линейным уравнением и режима ударного осциллятора. Окно программы для моделирования по уравнению Ван дер Поля с внешним вынуждающим воздействием приведено на рис. 8.4.

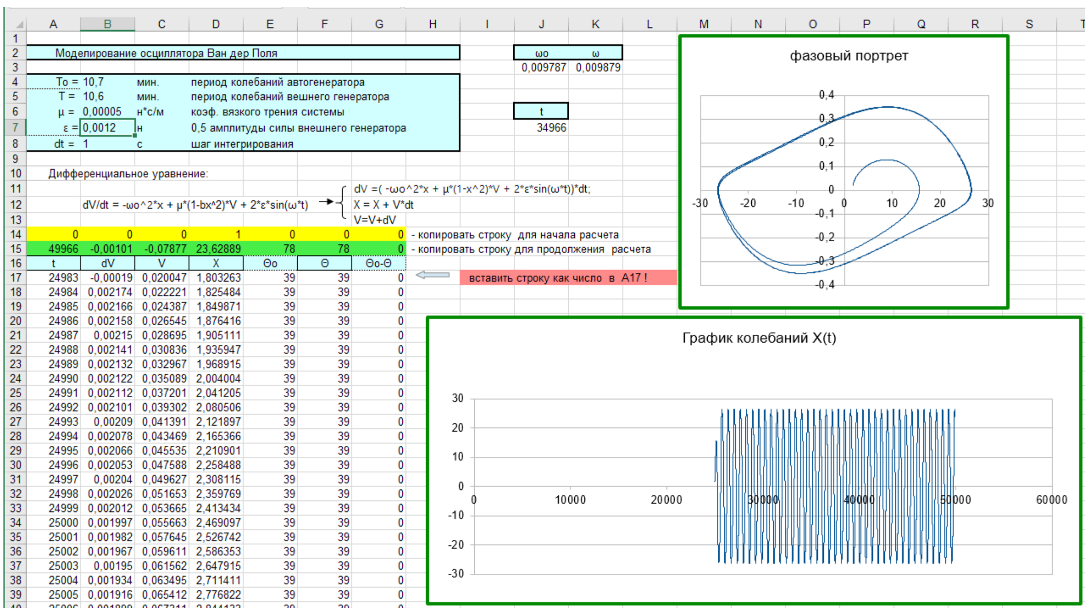


Рис. 8.4. Окно программы для моделирования по уравнению Ван дер Поля.

На голубом поле в окне редактора представлены параметры системы, которые можно изменять обычным для Excel способом. Аналогично изменяется и уравнение, используемое для моделирования системы. Заметим, что для расчета применено понижение порядка дифференциального уравнения. Частоты колебаний динамической системы и вынуждающего воздействия, также как и в программе Puan, рассчитываются через задаваемые периоды колебаний. Изменение шага интегрирования dt позволяет подобрать лучшее разрешение рисунков при изменении периодов колебаний.

8.3. Использование пакета Mathematica компании Wolfram для расчета бифуркационных диаграмм

Для расчета бифуркационных диаграмм авторы работы использовали пакет Mathematica компании Wolfram. Ниже приведен вариант программы для расчета бифуркационной диаграммы по уравнению Дуффинга, которая позволяет для разных параметров системы посмотреть при каких значениях происходит переход гармонических колебаний в хаос. Программа сканирует диапазон значений d (амплитуда внешнего воздействия) и дает значения x на аттракторе для каждого d.

$$\mathrm{bifurcation}[\mathrm{dmin\_}, \mathrm{dmax\_}, \mathrm{nd\_}, \gamma\_, \omega\_, \mathrm{w\_}, \mathrm{a\_}, \mathrm{ndrop\_}, \mathrm{nplop\_}, \mathrm{psize\_}] := (\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega}; g[\{\mathrm{xold\_}, \mathrm{vold\_}\}] := \{\mathrm{x}[\mathrm{T}], \mathrm{v}[\mathrm{T}]\}/.\,\mathrm{NDSolve}[\{\mathrm{v}'[\mathrm{t}] == \mathrm{wx}[\mathrm{t}] - \mathrm{ax}[\mathrm{t}]^3 - \gamma\mathrm{v}[\mathrm{t}] + \mathrm{dCos}[\omega\mathrm{t}], \mathrm{x}'[\mathrm{t}] == \mathrm{v}[\mathrm{t}], \mathrm{x}[0] == \mathrm{xold}, \mathrm{v}[0] == \mathrm{vold}\}, \{\mathrm{x}, \mathrm{v}\}, \{\mathrm{t}, 0, \mathrm{T}\}]\,[\![1]\!]\,; \mathrm{f}[\{\mathrm{x\_}, \mathrm{v\_}\}] := \{\mathrm{d}, \mathrm{x}\}; \mathrm{ListPlot}[\mathrm{Flatten}[\mathrm{Table}[\mathrm{f}/@\mathrm{Drop}[\mathrm{NestList}[g, \{1,0\}, \mathrm{nplop} + \mathrm{ndrop}], \mathrm{ndrop}], \quad \{\mathrm{d}, \mathrm{dmin}, \mathrm{dmax}, \frac{\mathrm{dmax} - \mathrm{dmin}}{\mathrm{nd}}\}],1], \mathrm{PlotStyle} \to \{\mathrm{PointSize}[\mathrm{psize}], \mathrm{Hue}[0]\}, \mathrm{PlotRange} \to \{\{\mathrm{dmin}, \mathrm{dmax}\}, \{\mathbf{0}, \mathbf{3}\}\}, \mathrm{AxesLabel} \to \{"\mathrm{d}", "\mathrm{x}"\}, \mathrm{AxesOrigin} \to \{\mathrm{dmin}, \mathbf{0}\}])$$

Для работы программы значения размера по оси вносится в текст программы, ниже которого вводится строка с параметрами расчета, например:

$$\mathrm{bifurcation}[14,24,200,0.1,0.523, -0.00122,2.2,3500,1000,0.006]$$

В этой строке последовательно через запятую записаны следующие параметры:

dmin, dmax размер по оси d (внешняя амплитуда), в примере 14 и 24;

nd 200 число значений d сканируется;

γ - – коэффициент затухания, 0.1;

ω – частота (период 12 сек) внешней силы 0.523;

w – квадрат частоты (период 3 мин) собственных колебаний системы -0.00122 (записывается с минусом);

a – коэффициент нелинейности 2.2;

ndrop 3500 –Уравнения интегрированы для 4500 периодов движущей силы, при этом первые 3500 игнорируются, а значение x, построенное в конце каждого из оставшиеся nplop 1000 периодов;

psize 0.006 – размер точек рисунка.

Программа Wolfram Mathematica также позволяет легко изменять масштаб отображения и детализировать необходимую часть бифуркационной диаграммы. Данная программа может использоваться для построения фазового портрета и отображения Пуанкаре. Пример такого использования приведен в работе, приведенной на сайте [The Duffing Equation, 2018].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Морские структуры имеют сложную нелинейную динамику. Субгармонические резонансы могут сосуществовать с малыми фундаментальными движениями. Хаотические непериодические движения также могут возникать в детерминированных задачах. Они чрезвычайно чувствительны к стартовым условиям и требуют статистического описания.

Мотивацией изучения морских объектов как динамических систем послужили эксперименты, проведенные ведущей нефтяной компанией на общем типе шарнирной причальной башни, которые выявили существование неожиданных субгармонических резонансов, приводящих к большим отклонениям. Швартовые линии могут многократно ослабевать во время этих колебаний, что приводит к нарушению жесткости системы и, как следствие, может привести к обрыву швартовых линий [Thompson, Stewart, 1986; Thompson et al., 1983].

Однако до последнего времени изучение морских динамических систем ограничивалось системами швартовки и практически не уделялось внимания другим морским объектам, которые также можно рассматривать как динамические системы, а именно – колебания воды в портовой бухте или прибрежной резонансной акватории. При этом оказалось, что такая система может синхронизироваться приходящими волнами или взаимодействовать с ледовым покрытием.

Такое взаимодействие морских динамических систем и малых приходящих волн может, как отмечалось во введении, приводить к хаотическому режиму колебаний и генерации больших волн, представляющих опасность для мореплавания или разрушения морского льда, на котором находятся рыбаки. Поэтому изучение морских объектов, как динамических нелинейных систем, позволяющее получить более детальную информацию о поведении таких систем, представляет большой практический и научный интерес.

Необходимо отметить, что в настоящее время теоретические исследования нелинейной динамики очень активно продвигаются. Это стало возможным, с одной стороны, благодаря большим теоретическим достижениям в качественном топологическом подходе Пуанкаре, а с другой, благодаря широкой доступности мощных цифровых и компьютеров.

Можно заключить, что на сегодняшний день существуют теоретически обоснованные методы для исследования динамических систем и их синхронизации с внешним воздействием, которые можно использовать как инструменты для проведения изучения морских динамических систем, и исследователям необходимо обратить на них пристальное внимание.

Цель данной книги – показать повсеместное наличие сложных морских динамических систем, имеющих определенные параметры для конкретных мест расположения и окружающих условий; изложить методы исследования таких систем, которые могут быть развиты наряду с развитием теории и анализа нелинейных динамических систем.

ЛИТЕРАТУРА

Авраменко, А.А. Теория нелинейных колебаний: [электронное учебное пособие] / А.А. Авраменко; Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева (Национальный исследовательский университет). – Самара, 2010. – 93 с. – 1 CD-ROM.

Андронов, А.А. Теория колебаний / А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Е. Хайкин. – Москва: Физматлит, 1959. – 916 с.

Анищенко, В.С. Лекции по нелинейной динамике / В.С. Анищенко, Т. е. Вадивасова. – Москва; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2011. – 516 с.

Арнольд, В.И. Теория катастроф / В.И. Арнольд // Math-Net.Ru. Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления» [сайт]. – 2020. – URL: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=intf&paperid=41&option_lang=rus (дата обращения: 03.02.2020).

Путь в синергетику. Экскурс в десяти лекциях / Б.П. Безручко, А.А. Короновский, Д.И. Трубецков, А.Е. Храмов. – Москва: Книжный дом «Либроком», 2010. – 304 с.

Бекман, И.Н. Синергетика. Курс лекций / И.Н. Бекман. – Москва: МГУ, 2010. – 40 с.

Боголюбов, Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. – Москва: Физматгиз, 1958. – 408 с.

Бугров, Я.С. Высшая математика. Том 3: Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – Москва: Дрофа, 2004. – 512 с.

Бычков, В.С. Морские нерегулярные волны / В.С. Бычков, С.С. Стрекалов. – М.: Наука, 1971. – 132 с.

Ваврив, Д.М. Хаос в осцилляторе Дуффинга с высокочастотным и низкочастотным внешним воздействием / Д. М. Ваврив, Д. В. Шигимага // Радиофизика и радиоастрономия. – 2000. – Т. 5, № 3. – С. 256–264.

Ветер, волны и морские порты. – Л.: Гидрометеоиздат, 1986. – 264 с.

Волченко, Ю.М. Дифференциальные уравнения высших порядков / Ю.М. Волченко. – 18 с. – URL: http://yura.volchenko.com/Education/DUHigh.pdf (дата обращения: 22.11.2018).

Горяченко, В.Д. Задачи по теории колебаний, устойчивости движения и качественной теории дифференциальных уравнений / В.Д. Горяченко, А.Л. Пригоровский, В.М. Сандалов. – Нижний Новгород: Нижегородский гос. ун-т им. Н.И. Лобачевского, 2014. – 25 с.

Деменок, С.Л. Динамический хаос / С.Л. Деменок. – Санкт-Петербург: Страта, 2015. – 300 с.

Эдвардс, Ч.Г. Дифференциальные уравнения и краевые задачи: моделирование и вычисление с помощью Mathematica, Maple и MATLAB / Ч.Г. Эдвардс, Д.Э. Пенни; перевод с английского Я. К. Шмидского. 3-е изд. – Москва: Вильямс, 2016. – 1104 с.

Думанская, И.О. Изменение климатических ледовых характеристик Охотского моря в конце XX – начале XXI века / И.О. Думанская // Труды Гидрометеорологического научно-исследовательского центра Российской Федерации. – Москва: Гидрометеорологический научно-исследовательский центр Российской Федерации. 2015. – С. 112–137.

Волны в пограничных областях океана / В.В. Ефимов, Е.А. Куликов, А.Б. Рабинович, И.В. Файн. – Ленинград: Гидрометеоиздат, 1985. – 280 с.

Ивельская, Т.Н. Мониторинг морских опасных явлений в порту города Холмск / Т.Н. Ивельская, В.Н. Храмушин, Г.В. Шевченко // Динамические процессы на шельфе Сахалина и Курильских островов. – Южно-Сахалинск, 2001. – С. 146–159.

Жинкин, В.Б. Теория и устройство корабля / В.Б. Жинкин. – Санкт-Петербург: Судостроение, 2002. – 336 с.

Заславский, М.М. О пересчете данных волнографа с датчиком давления на спектр поверхностных волн / М.М. Заславский, В.П. Красницкий // Океанология. – 2001. – Т. 41, № 2. – С. 195–200.

Зырянов, В.Н. Сейши подо льдом / В.Н. Зырянов //Водные ресурсы. – 2011. – Т. 38, № 3. – С. 259–271.

Качка // Sea-Man.org [сайт]. – URL: https://sea-man.org/kachka-sudna.html (дата обращения: 13.04.2018).

Крылов, Н.М. Введение в нелинейную механику / Н.М. Крылов, Н.Н. Боголюбов. – Киев: Изд. АН УССР, 1937. – 350 с.

Ковалев, Д.П. Экспериментальные исследования явления тягуна в основных портах Сахалинской области / Д.П. Ковалев // Мир транспорта. – 2012. – № 6. – С. 36–43.

Ковалев, Д.П. Возбуждение краевых волн атмосферными возмущениями на юго-восточном шельфе о. Сахалин / Д.П. Ковалев, Г.В. Шевченко, П.Д. Ковалев // Геодинамические процессы и природные катастрофы. Опыт Нефтегорска. Материалы Всероссийской научной конференции с международным участием, 26–30 мая 2015 года, Южно-Сахалинск. – Владивосток, Дальнаука, 2015. – Т. 1. – С. 307–311.

Ковалев, Д.П. Анализ особенностей колебаний пришвартованного судна при волнении / Д.П. Ковалев, П.Д. Ковалев, А.С. Борисов // Морские интеллектуальные технологии. – 2020. – Т. 1, № 2. – С. 108–117.

Ковалев, П.Д. Экспериментальные исследования явления тягуна в порту г. Холмск / П.Д. Ковалев, Г.В. Шевченко, Д.П. Ковалев // Известия АИН им. А.М. Прохорова. Прикладная математика и механика. – 2007. – Т. 20. – С. 106–112.

Ковалев, П.Д. Модуляция коротких инфрагравитационных волн приливом / П.Д. Ковалев, Д.П. Ковалев // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. – 2018. – Т. 11, № 1. – С. 21–27.

Ковалев, П.Д. Свидетельство о государственной регистрации программы PUAN для ЭВМ № 2018665955 / П.Д. Ковалев, В.И. Иволгин; Федеральная служба по интеллектуальной собственности. 11.12.2018.

Кузнецов, С.П. Динамический хаос / С.П. Кузнецов. – Москва: Физматлит, 2001. – 295 с.

Кузнецов, А.П. Нелинейные колебания: учебное пособие для вузов / А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, Н.М. Рыскин. – Москва: Физматлит, 2002. – 292 с.

Лабзовский, Н.А. Непереодические колебания уровня моря / Н.А. Лабзовский. – Ленинград: Гидрометеоиздат, 1971. – 237 с.

Леонтьев, В.А. Взаимодействие морских волн с судном, раскреплённым у причала / В.А. Леонтьев, И.С. Нуднер, К.К. Семенов // Международная конференция «Математические и информационные технологии, MIT-2013» (X конференция «Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании»): сборник докладов. – Р. 368–396.

Ловецкий, К.П. Учебно-методическое пособие по курсу «Математическое моделирование». Часть 1: Осциллятор / К.П. Ловецкий, Л.А. Севастьянов. – Москва: Изд-во РУДН, 2007. – 63 с.

Ляпунов, А.М. Собрание сочинений. Т. 1–3 / А.М. Ляпунов. – Москва; Ленинград: Изд-во АН СССР, 1954-1959. Т. 1. Москва,1954. – 446 с., Т. 2. Москва; Ленинград, 1956. – 472 с., Т. 3. Москва, 1959. – 374 с.

Ляпунов, А.М. Общая задача об устойчивости движения / А.М. Ляпунов. – Москва; Ленинград: Гостехиздат, 1950. – 472 с.

Мандельштам, Л.И. Об обосновании одного метода приближенного решения дифференциальных уравнений / Л.И. Мандельштам, Н.Д. Папалекси // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1934. – Т. 4, № 2. – С. 117–122.

Манилюк, Ю.В. Исследование свободных колебаний жидкости в ограниченном бассейне, представляющем приближенную модель Азовского моря / Ю.В. Манилюк, Л.В. Черкесов // Морской гидрофизический журнал. – 2016. – № 2. – С.16–26.

Математические модели хаоса // Хабр [сайт]. – URL: https://habr.com/ru/post/436014/ (дата обращения: 28.01.2019).

Митропольский, Ю.А. Метод усреднения в нелинейной динамике / Ю.А. Митропольский. – Киев: Наукова Думка, 1971. – 440 с.

Моисеев, Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики / Н.Н. Моисеев. – Москва: Наука, 1986. – 384 с.

Музылев, С.В. Волны в океане под ледяным покровом: основы теории и модельные задачи / С.В. Музылев // Современные проблемы динамики океана и атмосферы. – Москва: Триада ЛТД, 2010. – С. 315–345.

Мун, Ф.К. Хаотические колебания / Мун Ф.К.; перевод с англ. Ю.А. Данилова и А.М. Шкурова. – Москва: Мир, 1990. – 311 с.

Осипов, Г.В. Синхронизация внешним периодическим воздействием / Г.В. Осипов, А.В. Половинкин; Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского. – Нижний Новгород, 2005. – 78 с.

Пиковский, А.С. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление / А.С. Пиковский, М.Г. Розенблюм, Ю. Курте. – Москва: Техносфера, 2003. – 508 с.

Особенности развития ледяного покрова Охотского моря в 2001—2006 гг. / В.М. Пищальник, С.А. Покрашенко, А.В. Леонов, А.А. Гальцев // Сборник статей РЭА. – 2009. – №1. – С. 185–197.

Рабинович, А.Б. Длинные гравитационные волны в океане: захват, резонанс, излучение / А.Б. Рабинович. – Санкт-Петербург: Гидрометеоиздат, 1993. – 325 с.

Рабинович, М.И. Введение в теорию колебаний волн / М.И. Рабинович, Д.И. Трубецков. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. – 560 с.

Райхлен, Ф. Резонанс гавани / Ф. Райхлен // Гидродинамика береговой зоны и эстуариев. – Ленинград, 1970. – С. 114–166.

Ризниченко, Г.Ю. Математические модели биологических продукционных процессов / Г.Ю. Ризниченко, А.Б. Рубин. – Москва: МГУ, 1993. – 222 с.

Рюэль, Д. Случайность и хаос / Д. Рюэль. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 192 с.

Семенова, Е.Е. Фазовые портреты динамических систем / Е.Е. Семенова // Образовательный портал ПетрГУ [сайт]. – 2020. – URL: edu.petrsu.ru 3299_1454578374.pdf

Семенов, К.К. Воздействие морских волн на судно, ошвартованное у причала с камерой гашения / К.К. Семенов, В.А. Леонтьев, И.С. Нуднер // Magazine of Civil Engineering. – 2015. – № 3. – С. 57–66.

Синай, Я.Г. Конечномерная случайность / Я.Г. Синай // Успехи математических наук. – 1991. – Т. 46, Вып. 3(279). – С. 147–159.

Ситченко, Н.К. Общее устройство судов / Н.К. Ситченко, Л.С. Ситченко. – Ленинград: Судостроение, 1987. – 322 с.

Спротт, Д.К. Элегантный хаос / Д. К. Спротт. – Москва; Ижевск, 2012. – 328 с.

Стурова, И.В. Воздействие периодических поверхностных давлений на плавающую упругую платформу / И.В. Стурова // Прикладная математика и механика. – 2002. – Т. 66, Вып. 1. – С. 75–86.

Терехов, С.В. Введение в синергетику / С.В. Терехов. – Донецк: Цифровая типография, 2009. – 187 с.

Тимошенко, С.П. Колебания в инженерном деле / С.П. Тимошенко, Д.Х. Янг, У. Уивер; перевод с англ. Л.Г. Корнейчук, под ред. Э.И. Григолюк. –Москва: Машиностроение, 1985. – 472 с.

Трубецков, Д.И. Линейные колебания и волны: учебное пособие / Д.И. Трубецков, А.Г. Рожнев. – Москва: Издательство Физико-математической литературы, 2001. – 416 с.

Федорюк, М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения / М.В. Федорюк. – Москва: Наука, 1980. – 352 с.

Хейсин, Д.Е. Динамика ледяного покрова / Д.Е. Хейсин. – Ленинград: Гидрометеоиздат, 1967. – 215 с.

Чайников, К.Н. Общее устройство судов / К.Н. Чайников. – Ленинград: Судостроение, 1971. – 207 с.

Alligood, K.T. Chaos – An Introduction to Dynamical Systems / K.T. Alligood, T.D. Sauer, J.A. Yorke. – Springer-Verlag: New York, 1997. – 603 p.

Arovas, D. Lecture Notes on Nonlinear Dynamics (A Work in Progress) / D. Arovas; Department of Physics University of California. – San Diego, 2014. – 334 p.

Asfar, K.R. Optimization analysis of impact viscous damper for controlling self-excited vibrations / K.R. Asfar, S.N. Akour // J. Vib. Control. – 2005. – Vol. 11, N 1. – P. 103–120.

Beji, S. Note on a nonlinearity parameter of surface waves / S. Beji // Coastal Engineering. – 1995. – № 25. – P. 81–85.

Bernitsas, M.M. Nonlinear stability and simulation of two-line ship towing and mooring / M.M. Bernitsas, J.S. Chung // App. Ocean Res. – 1990. – № 11 – P. 153–166.

Birkhoff, G.D. Dynamical Systems: Colloquium Publications: Vol. 9 / G.D. Birkhoff. – American Mathematical Society, 1927. – 295 p.

Bishop, S.R. The onset of chaotic motions of a moored semi-submersible / S.R. Bishop, L.N. Virgin // ASME J. Offshore Mech. Arctic Eng. – 1988. – Vol. 110. – P. 205–209.

Braun, M. Differential equations and their applications / M. Braun. – NY: Springer-Verlag, 1975. – (Texts in Applied Mathematics; Vol. 11).

Bretherton, F.P. Low frequency oscillations trapped near the equator / F.P. Bretherton // Tellus. – 1964. – Vol. 16, № 2. – P. 181–185.

Busemeyer, J.R. Dynamic Systems / J.R. Busemeyer. – 2020. – URL: http://www.cogs.indiana.edu/Publications /techreps2000 /241/241.html (accessed: 07.09.2020).

Cartwright, M.L. On nonlinear differential equations of the second order. I. The equation $\ddot{y} + k(1 - y^2)\dot{y} + y = b\lambda t \cos(\lambda t + a), k$ large / M.L. Cartwright, J.E. Littlewood // J. Lond. Math. Soc. – 1945. – Vol. 1s-20, № 3. – P. 180–189.

Cartwright, M.L. Non-linear vibrations / M.L. Cartwright // Brit. Assoc. Adv. Sci. – 1949. – Vol. 6 (21). – P. 64–75.

Dynamics of elastic excitable media / Cartwright J.H.E., Eguiluz V.M., Hernandez-Garcia E., Piro O. // International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering. – 1999. – Vol. 9, № 11–12. – P. 2197–2202.

Cheng, J. Nonlinear dynamic characteristics of a vibro-impact system under harmonic excitation / Cheng J., Xui H. // Journal of Mechanics of Materials and Structures. – 2006. – Vol. 1, № 2. – P. 239–258.

Cho, D.S. Approximate natural vibration analysis of rectangular plates with openings using assumed mode method / Cho D.S., Vladimir N., Choi T.M. // Int. J. Nav. Archit. Ocean Eng. – 2013. – Vol. 5(3). – P. 478–491.

Chu, P.C. Generation of Unstable Modes of the Iceward-attenuating Swell by Ice Breeze / Chu P.C. // J. Phys. Oceanogr. – 1987. – Vol. 17(6). – P. 828–832.

Clarke, D.J. Long edge waves over a continental shelf / D.J. Clarke // Deut. Hydr. Zeit. –1974. – B. 27, Ht. l. – P. 1–8.

Clarke, A.J. Observational and numerical evidence for wind-forced coastal trapped long waves / A.J. Clarke // Journal of Physical Oceanography. – 1977. – Vol. 7. – P. 231–247.

Cvitanović, P. Topological and metric properties of Hénon-type strange attractors / P. Cvitanović, G.H. Gunaratne, I. Procaccia // Phys. Rev. A. – 1988. – Vol. 38(3). – P. 1503–1520.

Ice flexure forced by internal wave packets in the Arctic Ocean / P.V. Czipott, M.D. Levine, C.A. Paulson et al. // Science. – 1991. – Vol. 254(5033). – P. 832–835.

Dean, C.H. The attenuation of ocean waves near the open ocean/pack ice boundary / C.H. Dean // Symposium on Antarctic Oceanography, Sci. Comm. on Antarctic Res., Santiago, Chile, Sept. 13–16, 1966.

Ding, W.C. Interaction of Hopf and period doubling bifurcations of a vibro-impact system / Ding W. C., Xie J. H., Sun Q. S. // J. Sound Vib. – 2004. – Vol. 275(1–2). – P. 27–45.

Duffing, G. Enwungene Schwingungen bei Veranderlicher Eigenfrequenz / G. Duffing. Vieweg: Braunschweig, 1918.

Dumanskaya, I.O. Changes in the climatic ice characteristics of the Sea of Okhotsk in the late XX – early XXI century / I.O. Dumanskaya // Proceedings of the Hydrometcentre of Russia. – The Hydrometcenter of Russia, 2015. – P. 112–137.

Fang, W. Response of a periodically driven impact oscillator / W. Fang, J.A. Wickert // J. of Sound and vibration. – 1994. – Vol. 170 (3). – P. 397–409.

Farmer, J.D. The dimension of chaotic attractors / J.D. Farmer, E. Ott, J. A. Yorke // Physica. – 1983. – 7D. – P. 153–180.

Feigenbaum, M.J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations / M.J. Feigenbaum // J. Statist. Phys. –1978. – № 19. – P. 25–52.

Feynman, R. The Feynman Lectures on Physics / Feynman R. – Vol. II: Mainly Electromagnetism and Matter. – 1964. – Chapter 41. – URL: https://www.feynmanlectures.caltech.edu/II_toc.html (accessed: 19.06.2019).

Foale, S. Bifurcations in Impact Oscillators: Theoretical and Experimental Studies Thesis submitted for the degree of Doctor of Philosophy. – London: Centre for Nonlinear Dynamics University College, 1993. – 161 p.

The Australian coastal experiment: A search for coastal trapped waves / H.J. Freeland, F.M. Boland, J.A. Church et al. // J. Phys. Oceanogr. – 1986. – N 16. – P. 1230–1249.

Fujiwara, N. Spectral universality of phase synchronization in non-identical oscillator networks / N. Fujiwara, J. Kurths // Eur. Phys. J. – 2009. – № B 69. – P. 45–49.

Gaspard, P. Rössler systems / P. Gaspard // Encyclopedia of Nonlinear Science / Alwyn Scott (ed.). – New York, 2005. – P. 808–811.

Greenwood, J.A. Contact of Nominally Flat Surfaces / J.A. Greenwood, J.B.P. Williamson // Proc. Royal Society London. – 1966. – Vol. 295. – P. 300–319.

Grossberg, S. Studies of mind and brain / S. Grossberg. – D. Reidel Publishing Com., 1982. – 662 p.

Gottlieb, O. Nonlinear oscillations, bifurcations and chaos in ocean mooring systems: A thesis submitted to Oregon State University 1991 in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy Completed / O. Gottlieb. – 1992. – 157 p.

Guckenheimer, J. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields / J. Guckenheimer, P.J. Holmes. – New York: Springer-Verlag, 1993. – 462 p.

Guza, R.T. Local and Shoaled Comparisons of Sea Surface Elevations, Pressures, and Velocities / R.T. Guza, E.B. Thornton // J. of Geophysical Research. – 1980. – Vol. 85, N C3. – P. 1524–1530.

Haines, J.W. The Detection of Coastal-Trapped Waves // J.W. Haines, K.R. Thompson, D.P. Wiens // Journal of Geophysical Research. – 1991. – Vol. 96, N C2. – P. 2593–2597.

Hammel, S.M. Do numerical orbits of chaotic dynamical processes represent true orbits? / S.M. Hammel, J.A. Yorke, C. Grebogi // J. Complexity. – 1987. – № 3. – P. 136–145.

Hayashi, C. Nonlinear oscillations in physical systems / C. Hayashi. – Princeton University Press., 1964. – 429 p.

Holmes, P.J. The dynamics of repeated impacts with a sinusoidally vibrating table / P.J. Holmes // J. Sound Vib. – 1982. – Vol. 84, № 2. – P. 173–189. – Erratum in: 1983. – Vol. 88, № 2. – P. 287.

The Duffing Equation. – 2018. – 13 p. – URL: http://physics.ucsc.edu/~peter/115/duffing.pdf (accessed: 19.02.2018).

Jiang, T. Investigation of nonlinear ship dynamics involving instability and chaos in examples from offshore technology / T. Jiang; Institut fur Schiffbau der Universitat Hamburg. – Report no. 512 (in German). – Hamburg, 1991.

Arctic climate change: observed and modelled temperature and sea-ice variability / O.M. Johannessen, L. Bengtsson, M.W. Miles et al. // Tellus A Dyn. Meteorol. Oceanogr. – 2004. – Vol. 56(4). – P. 328–341.

Karmakar, D. Wave interaction with multiple articulated floating elastic plates / D. Karmakar, J. Bhattacharjee, T. Sahoo // J. Fluids Struct. – 2009. – Vol. 25(6). – P. 106–1078.

Kovacic, I. The Duffing Equation: Nonlinear Oscillators and their Behaviour / I. Kovacic, M.J. Brennan. – Wiley, 2011. – 392 p.

Kovalev, D.P. Synchronization of Long Ocean Waves by Coastal Relief on the Southeast Shelf of Sakhalin Island International / D.P. Kovalev, P.D. Kovalev // Journal of Bifurcation and Chaos. – 2017. – Vol. 27, № 13. – Article Number 1750195(8).

Kovalev, P.D. The dependence of the wave mode from external periodic excitation in the harbor of port Kholmsk / P.D. Kovalev, D.P. Kovalev // IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science. – IOP Publishing, 2019. – Vol. 324. – Article Number 012016.

Kovalev, P.D. The modulation of the eigen oscillation in the harbours by tide / P.D. Kovalev, D.P. Kovalev, V.S. Zarochintsev // IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science. – IOP Publishing, 2019. – Vol. 324. – Article Number 012013.

Kuznetsov, Y.A. Elements of Applied Bifurcation Theory / Y.A. Kuznetsov. – Springer Verlag, 1995. – 538 p.

LeBlond, P. Trapped coastal waves and their role in shelf dynamics / P. LeBlond, L. Mysak // The Sea: Ideas and Observations on Progress in the Study of the Seas. Vol. 6: Marine Modeling / E.D. Goldberg, J.N. McCave, J.J. O'Brien, J.H. Steele (eds.). – New York: Wiley, 1977. – P. 459–495.

Lee J.-Y. Motion behavior of impact oscillator / Lee J.-Y. // Journal of Marine Science and Technology. – 2005. –Vol. 13, № 2. – p. 89–96.

Lee, J.-Y. Blind Deconvolution of Impacting Signals Using High Order Statistics / J.-Y. Lee, A.K. Nandi // Mech. Syst. Signal Pr. – 1998. – Vol. 12, № 2. – P. 357–371.

Lee, J.-Y. Extraction of Impacting Signals Using Blind Deconvolution / J.-Y. Lee, A.K. Nandi // J. Sound Vib. – 2000. – Vol. 232, № 5. – P. 945–962.

Levinson, N. A second-order differential equation with singular solutions / N. Levinson // Ann. Math. – 1949. – Vol. 50. – P. 127–153.

Liu, A.K. Wave propagation in a solid ice pack / A.K. Liu, E. Mollo-Christensen // J. Phys. Oceanogr. – 1988. – Vol.18(11). – P. 1702–1712.

Liu, A.K. Wave propagation in the marginal ice zone: Model predictions and comparisons with buoy and synthetic aperture radar data / A.K. Liu, B. Holt, P.W. Vachon // J. Geophys. Res. – 1991. – Vol. 96(C3). – P. 4605–4621.

The Study of a Nonlinear Duffing – Type Oscillator Driven by Two Voltage Sources / J.O. Maaita, I.M. Kyprianidis, Ch. K. Volos, E. Meletlidou // Journal of Engineering Science and Technology Review. – 2013. – Vol. 6 (4). – P. 74–80.

Marchenko, A.V. Resonant excitation of waves in a heavy liquid beneath viscoelastic plate / A.V. Marchenko // J. Applied Mechanics and Technical Physics. – 1991. – Vol. 32. – P. 395–402.

Marchenko, A. Measurements of sea-ice flexural stiffness by pressure characteristics of flexural-gravity waves / A. Marchenko, E. Morozov, S. Muzylev // Ann. Glaciol. – 2013. – Vol. 54(64). – P. 51–60.

Martinez, J.A. A Modeling Study of Coastal-Trapped Wave Propagation in the Gulf of California. Part II: Response to Idealized Forcing / J.A. Martinez, J.S. Allen // J. of Physical Oceanography. – 2003. – Vol. 34. – P. 1332–1348.

Mei, C.C. Harmonicg enerationin shallow water waves / C.C. Mei, U. Ünlüata // Waves on Beaches and Resulting Sediment Transport / edited by R. E. Meyer. – New York: Academic, 1972. – P. 181–202.

Melnikov, V.K. On the stability of the center for time periodic perturbations / V.K. Melnikov // Trans. Moscow Math. Soc. – 1963. – № 12. – P. 1–56.

Menemenlis, D. A note on infragravity waves in the Arctic Ocean / D. Menemenlis, D.M. Farmer, P.V. Czipott // Journal of Geophysical Research. – 1995. – Vol. 100, N C4. – P. 7089–7093.

Mellor, M. Mechanical behavior of sea ice / M. Mellor; U.S. Army Corps of Engineers, Cold Regions Research & Engineering Laboratory. – CRREL, 1983. – 105 p. (CRREL; Monograph 83-1).

Menemenlis, D. A note on infragravity waves in the Arctic Ocean / D. Menemenlis, D.M. Farmer, P.V. Czipott // Journal of Geophysical Research. – 1995. – Vol. 100, N C4. – P. 7089–7093.

Mindlin, R.D. Flexural vibrations of rectangular plates / R.D. Mindlin, A. Schacknow, H. Deresiewicz // J. Appl. Mech. – 1956. – № 23. – P. 430–436.

Moon, F.C. Chaotic vibration / F.C. Moon – New York: Cornell University, 1987. – 309 p.

Detection and modelling of greenhouse warming in the Arctic and sub-Arctic / A.P. Nagurny, V.G. Korostelev, V.V. Ivanov, E.Y. Medvedchenko // Report for INTAS Grant 97–1277. 1999. – St. Petersburg: Arctic & Antarctic Research Institute, 1999. – 63 p.

Nayfeh, A.H. Applied Nonlinear Dynamics: Analytical, Computational and Experimental Methods / A.H. Nayfeh, B. Balachandran. – New York: John Wiley & Sons, 1995. – 685 p.

Newell, A. Human problem solving / A. Newell, H.A. Simon. – Englewood Cliffs: NJ: Prentice-Hall, 1972. – 938 p.

Nhantumbo, B.J. Sea level variability and coastal trapped waves around southern Africa: Dissertation presented in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Ocean and Climate Dynamics Department of Oceanography / B.J. Nhantumbo. – University of Cape Town, 2014. – 86 p.

Oortmerssen, G. van. The motions of a moored ship in waves / G. van Oortmerssen. – Wageningen, 1976. – 145 p.

Ott, E. Chaos in dynamical systems. Second edition / E. Ott. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2002. – 475 p.

Pchelintsev A.N. Numerical and physical modeling of the dynamics of the Lorenz system / A.N. Pchelintsev // Numerical Analysis and Applications. – 2014. – Vol. 7(2). – P. 159–167.

Pearce, S.M. Coastal trapped waves generated by hurricane Andrew on the Texas-Louisiana shelf: A Thesis by Submitted to the Office of Graduate Studies of Texas A&M

University in partial fulfillment of the requirements for the degree of master of science / S.M. Pearce. – 2011. – 64 p.

Perret-Liaudet, J. Experiments and numerical results on nonlinear vibrations of an impacting Hertzian contact. Part 2: Random excitation / J. Perret-Liaudet, E. Rigaud // J. Sound & Vib. – 2003. – Vol. 265(2). – P. 309–327.

Poincare, H. Les méthodes nouvelles de la mécanique celeste. Tome 1 / H. Poincare. – Paris, 1892. – 408 p. – URL: http://henripoincarepapers.univ-lorraine.fr/chp/hp-pdf/hp1892mna.pdf (accessed: 12.08.2018).

Pomeau, Y. Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems / Y. Pomeau, P. Manneville // Commun. Math. Phys. – 1980. – Vol. 74. – P. 189–197.

Porter, R. Trapping of water waves by pairs of submerged cylinders / R. Porter // J. Fluid Mech. – 2002. – Vol. 458. – P. 607–624.

Porter, R. The coupling between ocean waves and rectangular ice sheets / R. Porter // Journal of Fluids and Structures. – 2019. – Vol. 84. – P. 171–181.

Rabinovich, A.B. Seiches and Harbor Oscillations: Handbook of Coastal and Ocean Engineering / A.B. Rabinovich. – Singapur: World scientific publishing company, 2009. – P. 193–236.

Raichlen, F. Harbor resonance / F. Raichlen // Estuary and Coastline Hydrodynamics / Edited by A.T. Ippen. – New York: McGraw Hill Book Comp., 1966. – P. 281–340.

Rand, R.H. Lecture notes on nonlinear vibrations: version 45 / R.H. Rand. – The Internet-First University Press, 2004. – 136 p.

Rayleigh, J.W.S. The Theory of Sound / J.W.S. Rayleigh. – 2d ed., rev. and enl. – London, 1894.

Rehberg, I. Experimental observation of a codimension-two bifurcation in a binary fluid mixture / I. Rehberg, G. Ahlers // Phys. Rev. Lett. – 1985. – Vol. 55. – P. 500–503.

Robin, G. de Q. Wave propagation through fields of pack ice / G. de Q. Robin // Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A. – 1963. – Vol. 255(1057). – P. 313–339.

Rodney, J.T. Localisation of coastal trapped waves by longshore variations in bottom topography / J.T. Rodney, E.R. Johnson // Continental Shelf Research. – London: Elsevier. 2011. – P. 130–137.

Ruby, L. Applications of the Mathieu equation // Am. J. Phys. – 1996. – Vol. 64, № 1. – P. 39–44.

Ruelle, D. On the nature of turbulence / D. Ruelle, F. Takens. – Commun. Math. Phys. – 1971. – № 20. – P. 167–192.

Rumelhart, D.E. Parallel distributed processing Explorations in the microstructure of cognition. Vol. 1: Foundations / D.E. Rumelhart, J.L. McClelland. – Cambridge: MIT Press, 1986. – 317 p.

Russel R.C.H. A Study of the Movement of Moored Ships Subjected to Wave Action / R.C.H. Russel // Proceedings of the Institute of Civil Engineers. – 1959. – Vol. 12. – P. 379–398.

Shaw, S.W. Periodically forced linear oscillator with impacts: chaos and long-period motions / S.W. Shaw, P. Holmes // Phys. Rev. Lett. – 1983. – Vol. 51, № 8. – P. 623–626.

Shygimaga, D.V. Chaos due to the interaction of high- and low-frequency modes / D.V. Shygimaga, D.M. Vavriv, V.V. Vinogradov // IEEE Transactions on Circuits and Systems. – 1998. – Vol. 45, No. 12. – P. 1255–1260.

Smale, S. Diffeomorphisms with many periodic points / S. Smale // Differential and Combinatorial Topology / S.S. Cairns (ed.). – Princeton University Press: Princeton, 1963. – P. 63–80.

Squire V.A. Propagation of flexural gravity waves in sea ice / V.A. Squire, A.J. Allan // Sea Ice Processes and Models / edited by R.S. Pritchard. – Seattle: University of Washington Press, 1980. – P. 327–338.

Of ocean waves and sea ice // V.A. Squire, J.P. Dugan, P. Wadhams et al. // Fluid Mech. – 1995. – Vol. 27. – P. 115–168.

Sorensen, R.M. Harbor hydrodynamics / R.M. Sorensen, E.F. Thompson // Coastal Engineering Manual / U.S. Army Corps. of Engineers. – Washington, D.C., New York, 2002. – Part II, Chapter 7. – P. 1–92.

Strogatz, S. Nonlinear Dynamics and Chaos / S. Strogatz. – Westview Press, 2001. – 505 p.

The Duffing equation: nonlinear oscillators and their phenomena / edited by Ivana Kovacic, Michael J. Brennan. – 2011. – 369 p.

Thom, R. Stabilite structurelle et morphogenese / R. Thom. – New York: Benjamin, 1972. – 362 p.

Thompson, J.M.T. Complex dynamics of Compliant Offshore Structures / J.M.T. Thompson // P. Roy. Soc. A: Math. Phys. – 1983. – Vol. 387. – P. 407–427.

Thompson, J.M.T. Chaotic dynamics of an impact oscillator / J.M.T. Thompson, R. Ghaffari. – Phys. Rev. A. – 1983. – Vol. 27. – P. 1741–1743.

Thompson, J.M.T. Subharmonic resonances and chaotic motions of bilinear oscillator / J.M.T. Thompson, A.R. Bokaian, R. Ghaffari // IMA J. Appl. Math. – 1983. – Vol. 31. – P. 207–234.

Thompson, J.M.T. Nonlinear dynamics and chaos / J.M.T. Thompson, H.B. Stewart. – New York: Wiley, 1986. – 376 p.

Thompson, J.M.T. Nonlinear Dynamics and Chaos / J.M.T. Thompson, H.B. Stewart. – 2nd ed. – John Wiley and Sons, 2002. – 437 p.

Tidal modulation of infragravity waves via nonlinear energy losses in the surfzone / J. Thomson, S. Elgar, B. Raubenheimer et al. // Geophysical Research Letters. – 2006. – Vol. 33. – Article Number L05601.

Ueda, Y. Steady Motions Exhibited by Duffing's Equation: A Picture Book of Regular and Chaotic Motions / Ueda, Y. – Institute of Plasma physics, Nagoya University, 1980. – 12 p.

Vadivasova, T.E. Phase-frequency synchronization in a chain of periodic oscillators in the presence of noise and harmonic forcings / T.E. Vadivasova, G.I. Strelkova, V.S. Anishchenko // Physical Review E. – 2001. – Vol. 63. – P. 036225-1–036225-8.

Van der Pol, B. A theory of the amplitude of free and forced triode vibrations / B. Van der Pol // Radio Review. – 1920. – № 1. – P. 701–710, 754–762.

Van der Pol, B. Forced oscillations in a circuit with nonlinear resistance (reception with reactive triode) / B. Van der Pol // Phil. Mag. – 1927. – Vol. 7, N 3. – P. 65–80.

Wadhams, P. Attenuation of swell by sea ice // J. Geophys. Res. – 1973. – Vol. 78(18). – P. 3552–3563.

Wadhams, P. The Seasonal Ice Zone / P. Wadhams. – Boston: Springer US, 1986. – P. 825–991.

Wadhams, P. Sea ice thickness measurement using episodic infragravity waves from distant storms / P. Wadhams, Martin J. Doble // Cold Regions Science and Technology. – 2009. – Vol. 56. – P. 98–101.

Wang, D.-P. Long coastal trapped waves off the west coast of the United States, summer 1973. / D.-P. Wang, C.N.K. Mooers // Journal of Physical Oceanography. – 1977. – Vol. 7. – P. 856–864.

Wilson, B. Seiches / B. Wilson // Advances in Hydrosciences. – 1972. – Vol. 8. – P. 1–94.

Yim, S.C. Nonlinear ocean wave models and laboratory simulation of high seastates and rogue waves / Yim S.C., Osborne A.R., Mohtat A. // Proceedings of the ASME 2017 International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering OMAE2017. June 25–30, 2017, Trondheim, Norway. – 2017. – P. 1–16.

Young, P. The Duffing Equation / P. Young. – 2015. – 13 p. – URL: http://physics.ucsc.edu/~peter/115/duffing.pdf (accessed: 02.03.2016).

Zakharov, V.E. Weakly nonlinear waves on surface of ideal finite depth fluid / V.E. Zakharov // Amer. Math. Soc. Transl. – 1998. – Vol. 182. – P. 176–197.

Zaks, M.A. On phase synchronization by periodic force in chaotic oscillators with saddle equilibria / M.A. Zaks, E.H. Park, J. Kurths // J. Bifurcation and Chaos. – 2000. – Vol. 10(11). – P. 2649–2667.

Zamudio, L. A note on coastally trapped waves generated by the wind at the Northern Bight of Panamá / L. Zamudio, E.J. Metzger, P.J. Hogan // Centro de Ciencias de la Atmósfera. – 1969. – N 21(3). – P. 241–248.

Zakharov, V. Hamiltonian Formalism for System of Hydrodynamic type / V. Zakharov, E. Kuznetsov // Math. Phys. Rev. – 1984. – № 4. – P. 167–220.

Zaslavsky, M.M. On the conversion of wave-gauge pressure data to the spectrum of surface waves / M.M. Zaslavsky, V.P. Krasnitsky // Oceanology. – 2001. – Vol. 41(2). – P. 184–188.

Zeeman, E.C. Catastrophe Theory-Selected Papers 1972-1977 / E.C. Zeeman. – Addison-Wesley, 1977. – 675 p.

Для заметок

Научное издание

Дмитрий Петрович Ковалев
Петр Дмитриевич Ковалев

ХАОТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ, БИФУРКАЦИЯ И СИНХРОНИЗАЦИЯ В МОРСКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Ответственный редактор:
В.И. Иволгин
к.ф.-м.н., Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина

Рецензент:
Т.В. Белоненко
д.г.н., профессор кафедры океанологии
Санкт-Петербургского государственного университета

Электронная верстка: *А.В. Леоненкова*
Дизайн обложки: *А.В. Леоненкова*
Корректор: *И.П. Кремнева*

Подписано в печать 24.12.2021 г.
Усл. печ. лист. 13,3. Уч.-изд. лист. 7,4.
Формат 60×84/8. Бумага «Golden Plus».
Тираж 305 экз. Заказ № 7967.
Печать цифровая.

Отпечатано с оригинал-макета,
подготовленного в ФГБУН Институт морской геологии и геофизики
Дальневосточного отделения РАН
693022, г. Южно-Сахалинск. ул. Науки, 1Б
Участок офсетной и оперативной полиграфии